UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 13/2/24 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Se una gelateria propone 12 gusti di gelato, in quanti modi si può comporre una coppetta con tre palline di gusti diversi?

2. Per la successione $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ data da $a_n = \dfrac{\log(n)}{n}$ calcolare il limite in $+\infty$ e dire se sia monotona.

3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2}$.

4. Provare che la funzione $f : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 1 + \tan(x) - 4x$ ha uno e un solo zero.

5. Provare che la funzione $f : [1, 3] \to [2, 12]$ data da $f(x) = x^2+x$ è invertibile con inversa g derivabile e calcolare $g'(6)$.

6. Applicando il Teorema di Cauchy alle funzioni $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definite da $f(x) = x + x^3$ e $g(x) = \cos(\pi \cdot x)$ si conclude che esiste $c \in (0, 1)$ con $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \ldots$

7. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \mathrm{e}^{2x} + \cos(3x)$ è concava o convessa su un intervallo aperto contenente 0? Spiegare.

8. Dire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{n^2}$ sia convergente e se lo sia assolutamente.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 13/2/24 — Esercizio

Considerare l'espressione $f(x) = \dfrac{2x^2 + 13x + 3}{x - 1}$.

(A) (1 punto) Determinare il più grande $D \subset \mathbb{R}$ tale che essa definisca una funzione $f : D \to \mathbb{R}$.

(B) (2 punti) Calcolare i limiti di f agli estremi di D e determinare tutti gli asintoti del grafico di f.

(C) (3 punti) Trovare tutti i punti di massimo e di minimo relativo di f.

(D) (2 punti) Indicare gli intervalli su cui f è convessa e quelli su cui è concava.

(E) (1 punto) Provare che f ha due zeri entrambi negativi senza calcolarne il valore.

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Chimica per l'Industria e l'Ambiente

Istituzioni di Matematica I — **Parte I** — Prova del 13/2/24 — Quesiti

Risposte ai quesiti

1. 220

2. Limite 0; non monotona perché $0 = a_1 < a_2$ mentre $a_2 > a_n$ per n grande, visto che il limite fa 0

3. $-\frac{1}{2}$

4. $f(0) = 1 > 0 > f(\frac{\pi}{4}) = 2 - \pi$ e $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - 4$ è negativa su $[0, \frac{\pi}{4}]$ poiché $\cos(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ su $[0, \frac{\pi}{4}]$, onde $\frac{1}{\cos^2(x)} \leqslant 2$

5. $f(1) = 2$, $f(3) = 12$, f è crescente poiché $f'(x) > 0$ su $[1, 3]$, f è continua e derivabile, dunque l'inversa g esiste ed è derivabile; poiché $6 = f(2)$ si ha $g'(6) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{5}$

6. -1

7. Poiché $f''(0) = -5 < 0$ la f è concava su un intervallo aperto contenente 0

8. Converge per il criterio di Leibniz ma non assolutamente perché $\frac{n+1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$

Soluzione dell'esercizio

(A) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(B) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$; asintoto verticale $x = 1$, asintoto obliquo $y = 2x + 15$

(C) $x = -2$ punto di massimo relativo, $x = 4$ punto di minimo relativo

(D) Convessa sugli intervalli contenuti in $(1, +\infty)$, concava su quelli contenuti in $(-\infty, 1)$

(E) Poiché f ha limite $-\infty$ in $-\infty$ e in 1^- e $f(-2) = 5 > 0$ essa ha i propri due zeri in $(-\infty, 1)$; tuttavia $f(0) = -3 < 0$ e f è decrescente su $[0, 1)$, dunque è negativa su $[0, 1)$, pertanto i due zeri appartengono a $(-\infty, 0)$