"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 17/11/99 (non fiscale)

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Siano $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ successioni tali che $b_n \neq 0$ e $0 < a_n/b_n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se la $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è assolutamente convergente, lo è per forza anche la $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? $\boxed{\mathrm{V}}$ / $\boxed{\mathrm{F}}$

2. Sia $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ la successione definita da $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = (-1)^n \cdot a_n \end{cases}$. È vero che i termini della successione hanno alternativamente segno positivo e negativo? $\boxed{\mathrm{V}}$ / $\boxed{\mathrm{F}}$

3. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \in [-1, 1], \ y \in [-1, 1], \ z = x^2 + y^2 - x^2 \cdot y^2\}$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione. È sempre vero che $\int_S (\frac{\partial f}{\partial x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial y} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z) = 0$? $\boxed{\mathrm{V}}$ / $\boxed{\mathrm{F}}$

4. La funzione $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x) + y \cdot z \\ y \cdot \log(\mathrm{e} + \sin x) \\ (y + z) \cdot (1 + x)^3 \end{pmatrix}$ ammette una inversa locale nell'intorno del punto $(0, 0, 0)$? $\boxed{\mathrm{V}}$ / $\boxed{\mathrm{F}}$

5. Il problema di Cauchy $\begin{cases} x' = x^2 - t^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$ ammette soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$? $\boxed{\mathrm{V}}$ / $\boxed{\mathrm{F}}$

6. Sia $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$. Si annulla $\int_{\partial\Delta} \Re(z) \, \mathrm{d}z$? (Con $\Re(z)$ si indica la parte reale di un numero complesso z.) $\boxed{\mathrm{V}}$ / $\boxed{\mathrm{F}}$

7. Sia $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ la successione definita da $\begin{cases} a_0 = 0, \ a_1 = 1, \ a_2 = 2, \\ a_{n+3} = 3a_{n+1} - 2a_n. \end{cases}$ Quanto fa $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$?

$\boxed{\mathrm{a}}$ $+\infty$; $\boxed{\mathrm{b}}$ $-\infty$; $\boxed{\mathrm{c}}$ 1; $\boxed{\mathrm{d}}$ 0.

8. Il differenziale della forma $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}(-y \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}y)$

$\boxed{\mathrm{a}}$ è sempre nullo; $\boxed{\mathrm{b}}$ è definito e continuo su tutto il piano;
$\boxed{\mathrm{c}}$ non è limitato nell'intorno di $(0, 0)$; $\boxed{\mathrm{d}}$ nessuna delle precedenti.

9. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[n/2]} \cdot n^{-1/2}$ è convergente? (Con $[x]$ si indica la parte intera di $x \in \mathbb{R}$.)

$\boxed{\mathrm{a}}$ Sì, assolutamente; $\boxed{\mathrm{b}}$ Sì, ma non assolutamente;
$\boxed{\mathrm{c}}$ Diverge a $+\infty$; $\boxed{\mathrm{d}}$ Nessuna delle precedenti.

10. Quale dei seguenti punti è critico per la funzione $x \cdot y \cdot z$ sulla curva di equazioni $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 1 - x^2$?

$\boxed{\mathrm{a}}$ $(0, 1, 1)$; $\boxed{\mathrm{b}}$ $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/2)$; $\boxed{\mathrm{c}}$ $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1/2)$; $\boxed{\mathrm{d}}$ $(1/2, \sqrt{3}/2, 3/4)$.

11. Sia x la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} x' = x \cdot \cos(t), \\ x(0) = 0. \end{cases}$ Quanto fa $x(1)$?

$\boxed{\mathrm{a}}$ 0; $\boxed{\mathrm{b}}$ 1; $\boxed{\mathrm{c}}$ -1; $\boxed{\mathrm{d}}$ nessuna delle precedenti.

12. Se $z = x + iy$, quanto fa la parte reale di $z^2 \cdot \mathrm{e}^{iz}$?

$\boxed{\mathrm{a}}$ $\mathrm{e}^{y}((x^2 - y^2)\cos(x) + 2xy\sin(x))$; $\boxed{\mathrm{b}}$ $\mathrm{e}^{-y}((x^2 - y^2)\cos(x) - 2xy\sin(x))$;
$\boxed{\mathrm{c}}$ $\mathrm{e}^{-y}((x^2 - y^2)\cos(x) + 2xy\sin(x))$; $\boxed{\mathrm{d}}$ $\mathrm{e}^{y}((x^2 - y^2)\cos(x) - 2xy\sin(x))$.

Durante la prova deve essere esibito il libretto universitario o un documento. Non è concesso alzarsi prima della fine della prova né chiedere chiarimenti. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e una penna. Prima di consegnare bisogna annotare le risposte date. Le domande V/F valgono ± 2 punti, le altre $+3/-1$ punti. Le risposte omesse valgono 0.

UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 17/11/99 (non fiscale)

Risposte esatte

1. V
2. F
3. V
4. V
5. V
6. F
7. c
8. d
9. b
10. d
11. a
12. b