Corso di Algebra Lineare e Analisi Matematica II

Anno Accademico 2018-2019

QUINTA PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA II

Seconda parte

Pisa, 07.01.20

Nome e cognome **Matricola**

1. Sia $f_\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_\lambda(x,y) = \lambda \sin(xy) - 4x^2 - y^2 \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \; .$$

(a) Provare che $f_\lambda \leq |\lambda| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Dire, motivando la risposta, per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il punto $O = (0,0)$ è di massimo (locale o assoluto) per f_λ .

(c) Dire, motivando la risposta, per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il punto $O = (0,0)$ è di massimo locale ma *non* assoluto per f_λ .

(d) Dato l'ellisse $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 8\}$, mostrare che

$$\max_E f_\lambda = -8 + |\lambda| \quad , \quad \min_E f_\lambda = -8 - |\lambda| \; .$$

2. Sia $\mathbf{r} : [\pi/2 \, , \, 3\pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\mathbf{r}(t) = \big(\sin(2t), \cos t\big) \; .$$

(a) Provare che $\mathbf{r}$ è una curva regolare, semplice e chiusa.

(b) Calcolare l'area del dominio D racchiuso dal sostegno di $\mathbf{r}$.

3. Sia $\mathbf{F} = (z, \, x, \, y + z)$ un campo in $\mathbb{R}^3$ e sia Σ la superficie definita implicitamente nel seguente modo

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^4 = 1 \, , \, z \geq 0\}$$

ed orientata scegliendo nel punto $(0,0,1)$ il versore normale $\mathbf{v} = (0,0,1)$.

(a) Dire, motivando la risposta, se $\mathbf{F}$ è conservativo.

(b) Calcolare il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ .