Soluzioni compito 07.01.20

Esercizio 1

a) Si ha
$$-4x^2-y^2 \leq 0 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$\lambda \sin(xy) \leq |\lambda \sin(xy)| = |\lambda||\sin(xy)| \leq |\lambda| \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
Pertanto
$$f_\lambda(x,y) = \lambda \sin(xy) - 4x^2 - y^2 \leq |\lambda| \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

b) La funzione f_λ è di classe C^2 in $\mathbb{R}^2$. Le sue derivate parziali prime sono
$$D_1 f_\lambda(x,y) = \lambda y \cos(xy) - 8x$$
$$D_2 f_\lambda(x,y) = \lambda x \cos(xy) - 2y.$$
Ne segue
$$f_\lambda(0,0) = D_1 f_\lambda(0,0) = D_2 f_\lambda(0,0) = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$
cioè il punto $O = (0,0)$ è comunque stazionario per f_λ.
Calcoliamo allora la matrice hessiana in O
$$D_{11} f_\lambda(x,y) = -\lambda y^2 \sin(xy) - 8$$
$$D_{12} f_\lambda(x,y) = \lambda \cos(xy) - \lambda xy \sin(xy) = D_{21} f_\lambda(x,y)$$
$$D_{22} f_\lambda(x,y) = -\lambda x^2 \sin(xy) - 2$$
da cui
$$H_{f_\lambda}(0,0) = \begin{pmatrix} -8 & \lambda \\ \lambda & -2 \end{pmatrix}.$$
I suoi autovalori sono le radici (reali) del polinomio
$$p(t) = (8+t)(2+t) - \lambda^2 = t^2 + 10t + 16 - \lambda^2$$
per la regola di Cartesio entrambe negative se
$$\lambda^2 < 16, \text{ cioè } \quad |\lambda| < 4$$

e di segno opposto se $|\lambda| > 4$. Pertanto O è di massimo (locale o assoluto) se $|\lambda| < 4$.

Osserviamo inoltre che

$$\sin(xy) \leq |\sin(xy)| \leq |xy|, \quad \sin(xy) \geq -|\sin(xy)| \geq -|xy|$$

e dunque

$$f_4(x,y) = 4\sin(xy) - 4x^2 - y^2 \leq 4|xy| - 4x^2 - y^2 = -\left(2|x| - |y|\right)^2 \leq 0$$

$$f_{-4}(x,y) = -4\sin(xy) - 4x^2 - y^2 \leq 4|xy| - 4x^2 - y^2 = -\left(2|x| - |y|\right)^2 \leq 0$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pertanto anche per $|\lambda| = 4$, O è di massimo (locale o assoluto) per f_λ.

c) Per il punto a) f_λ è limitata superiormente. In particolare, fuori dall'ellisse $E_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; 4x^2 + y^2 \leq 1 + |\lambda|\}$ si ha

$$f_\lambda(x,y) \leq |\lambda||\sin(xy)| - (|\lambda| + 1) \leq -1$$

Per il teorema di Weierstrass abbiamo allora

$$\exists \max_{(x,y) \in E_\lambda} f_\lambda(x,y)$$

$$\max_{(x,y) \in E_\lambda} f_\lambda \geq f_\lambda(0,0) = 0 > -1 \geq f_\lambda(x,y) \quad \forall (x,y) \notin E_\lambda$$

Se ne conclude che $\exists \max_{\mathbb{R}^2} f_\lambda = \max_{E_\lambda} f_\lambda$

Ma se O non è di massimo assoluto per f_λ, deve allora esiste un altro punto stazionario, cioè una coppia $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ soluzione del sistema

$$(*) \quad \begin{cases} D_1 f_\lambda(x,y) = \lambda y \cos(xy) - 8x = 0 \\ D_2 f_\lambda(x,y) = \lambda x \cos(xy) - 2y = 0 \end{cases}$$

Osserviamo: se uno qualunque dei 4 numeri $\lambda, x_0, y_0, \cos(x_0 y_0) = 0$, si ha immediatamente $x_0 = y_0 = 0$;

da (*) si ottiene quindi, dividendo membro a membro

$$y_0/x_0 = 4x_0/y_0 \iff 4x_0^2 = y_0^2$$

da cui $\pm\lambda x_0 \cos(2x_0^2) \mp 4x_0 = 0 \iff \cos(2x_0^2) = 4/\lambda$

che ha soluzione solo quando $|\lambda| \geq 4$.

Ma per il punto b) se $|\lambda| = 4$ O è di massimo assoluto, mentre per $|\lambda| > 4$ non è di massimo locale ma di sella.

Conclusione: $O = (0,0)$ non è mai di massimo locale ma non assoluto, qualunque sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) Sul vincolo dato da E si ha ovviamente

$$f_\lambda(x,y) = \lambda \sin(xy) - 8$$

Come nel punto a), abbiamo allora

$$f_\lambda(x,y) \leq |\lambda||\sin(xy)| - 8 \leq |\lambda| - 8$$

$$f_\lambda(x,y) \geq -|\lambda||\sin(xy)| - 8 \geq -|\lambda| - 8$$

se $(x,y) \in E$. D'altra parte

$$\exists (x_0,y_0) \in E : f_\lambda(x_0,y_0) = \begin{cases} |\lambda| - 8 \\ -|\lambda| - 8 \end{cases} \iff \text{i due sistemi}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 8 \\ \sin(xy) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 8 \\ \sin(xy) = -1 \end{cases} \quad \text{sono risolubili}$$

ed in particolare ~~se~~ sono risolubili i seguenti 2

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 8 \\ xy = \pi/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 8 \\ xy = -\pi/2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y = \pi/2x \\ 16x^4 - 32x^2 + \pi^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\pi/2y \\ 16x^4 - 32x^2 + \pi^2 = 0 \end{cases}$$

Poiché $\Delta/4 = 256 - 16\pi^2 > 0$, la regola di Cartesio assicura che l'equazione biquadratica ha 4 soluzioni reali. Entrambi i sistemi sono dunque risolubili e si ha pertanto

$$\max_E f_\lambda = |\lambda| - 8 \quad , \quad \min_E f_\lambda = -|\lambda| - 8 \, .$$

Esercizio 2.

a) La curva data è di classe C^1 perché le sue componenti lo sono. Inoltre

$$\underline{r}'(t) = (2\cos(2t), -\sin t) \, .$$

Poiché $\sin t = 0 \iff t = \pi$ in $[\pi/2, 3\pi/2]$ e d'altra parte $\cos(2\pi/2) = \cos\pi = -1$, si ha subito che

$\underline{r}'(t) \neq (0,0)$. La curva è quindi regolare.

E' anche semplice perché $r_2(t) = \cos t$ è strettamente decrescente in $]\pi/2, 3\pi/2[$ e pertanto iniettiva. Non possono dunque esistere $t_1, t_2 \in]\pi/2, 3\pi/2[$, $t_1 \neq t_2$ tali che $\underline{r}(t_1) = \underline{r}(t_2)$.

Infine

$$\underline{r}(\pi/2) = (\sin\pi, \cos\pi/2) = (0,0) = (\sin 3\pi, \cos 3\pi/2) = \underline{r}(3\pi/2)$$

cioè la curva è chiusa.

b) Per il punto a) D è limitato e la sua area può essere calcolata con la formula di Gauss-Green applicata al campo $\underline{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$\underline{G}(x,y) = \frac{1}{2}(-y, x) \, .$$

Si ha allora, detto γ il sostegno della curva $\underline{r}$

$$\text{area}(D) = \iint_D dx\,dy = \oint_\gamma \underline{G}\, ds .$$

Ma

$$\oint_\gamma \underline{G}\, ds = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} < \underline{G}(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) > dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} < (-\cos t, \sin(2t)), (2\cos(2t), -\sin t) > dt =$$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} ((2\sin^2 t - 1)\cos t - \sin^2 t \cos t)\, dt = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\sin^2 t - 1)\cos t\, dt = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx =$$

$$= 2 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2 - 2/3 = 4/3$$

Esercizio 3

a) $\underline{F}$ è di classe C^1. Calcoliamone il rotore

$$\text{rot}\,\underline{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial(y+z)}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z} - \frac{\partial(y+z)}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) =$$

$$= (1, 1, 1) \neq (0, 0, 0).$$

Non essendo irrotazionale, il campo non è pertanto conservativo

b) Osserviamo che il bordo di Σ è la circonferenza γ di centro l'origine e raggio 1 nel piano (x, y). Cioè

$$\partial\Sigma = \gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1, z = 0\}$$

Inoltre l'orientazione nel verso dell'asse z di Σ

induce su γ l'orientazione (positiva) nel verso antiorario. Una parametrizzazione di γ è dunque data da

$$\underline{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad \underline{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0).$$

Per il teorema del rotore si ha quindi

$$\Phi(\mathrm{rot}\,\underline{F}, \Sigma) = \iint_{\Sigma} \langle \mathrm{rot}\,\underline{F}, \underline{n} \rangle \, dS = \oint_{\gamma} \underline{F} \cdot ds .$$

D'altra parte

$$\oint_{\gamma} \underline{F}\, ds = \int_0^{2\pi} \langle \underline{F}(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \langle (0, \cos t, \sin t), (-\sin t, \cos t, 0) \rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt .$$

Ma

$$\int \cos^2 t \, dt = \sin t \cos t + \int \sin^2 t \, dt = \sin t \cos t +$$

$$+ \int (1 - \cos^2 t) \, dt = t + \sin t \cos t - \int \cos^2 t \, dt$$

da cui

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \Big[t + \sin t \cos t \Big]_0^{2\pi} = \pi .$$

Se ne conclude che

$$\Phi(\mathrm{rot}\,\underline{F}, \Sigma) = \oint_{\gamma} \underline{F}\, ds = \pi$$

$\square$