Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 3 giugno 2008 – SOLUZIONE

1. Se $a_n := \dfrac{n-3(-1)^n n}{n+3}$ indicare quali delle seguenti affermazioni sono vere (punti 1/-1 a domanda.

   (a) (a_n) è limitata;

   (b) (a_n) ha limite;

   (c) (a_n) ha una sottosuccessione convergente a 3;

   (d) (a_n) ha una sottosuccessione convergente a 4.

   Spiegazione. Si ha $\dfrac{-2n}{n+3} \le a_n \le \dfrac{4n}{n+2}$. Dato che la prima e la terza successione hanno limite (-2 e 4) esse sono limitare e quindi $\boxed{(a_n) \text{ è limitata}}$. Peraltro guardando a_n per n pari e per n dispari si ha:

$$a_{2n} = \frac{-4n}{2n+3} \to -2, \quad a_{2n+1} = \frac{4(2n+1)}{2n+4} \to 4$$

   Se ne deduce che $\boxed{(a_n) \text{ non ha limite}}$ (visto che ci sono due sottosuccessioni che tendono a limiti diversi), che $\boxed{\text{c'è una sottosuccessione convergente a 4}}$ (quella degli n dispari) e $\boxed{\text{non c'è nessuna sottosuccessione convergente a 3}}$ (dato che i pari e i dispari esauriscono tutti gli interi). □

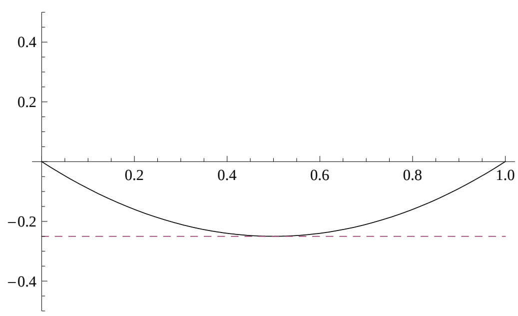
2. Se

$$c := \sup\left\{x \in \mathbb{R} : y^2 - y > x \quad \forall y \in [0,1]\right\}$$

   si ha (2/-.5 punti):

$$(a)\ c = 0, \quad (b)\ c = \frac{1}{2}, \quad (c)\ c = -\frac{1}{4}, \quad (d)\ c = 1, \quad (e)\ c = +\infty.$$

   Spiegazione. Il numero c è l'ordinata della massima retta orizzontale che sta interamente sotto il grafico della parabola $f(y) = y^2 - y$ (vedi la figura). Con facili calcoli si vede allora che $\boxed{c = -\frac{1}{4}}$.



□

3. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (2 punti ciascuno)

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{10^n - n!}{n^{100} + 5^n}$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^6+36}$;

(c) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[4]{n^4-n^2+1}-n\right)$;

(d) $\lim_{n\to\infty} \arctan\left(\dfrac{n^3+5}{3-\ln(n)}\right)$.

Spiegazione. (a) Si ha $\lim_{n\to\infty} \dfrac{10^n - n!}{n^{100}+5^n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{5^n}\dfrac{\frac{10^n}{n!}-1}{\frac{n^{100}}{5^n}+1} = \boxed{-\infty}$ dato che (limiti notevoli) $\frac{n!}{5^n}\to+\infty$, $\frac{10^n}{n!}\to 0$ e $\frac{n^{100}}{5^n}\to 0$;

(b) $\sqrt[n]{n^6} \le \sqrt[n]{n^6+36} \le \sqrt[n]{n^6}\sqrt[n]{1+\frac{36}{n^6}} \le \sqrt[n]{n^6}\sqrt[n]{37}$; dato che $\sqrt[n]{n^6} = (\sqrt[n]{n})^6 \to 1^6 = 1$ e $\sqrt[n]{37}\to 1$ si ha: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^6+36} = \boxed{1}$;

(c) $n\left(\sqrt[4]{n^4-n^2+1}-n\right) = n^2\left(\sqrt[4]{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}-1\right) = n^2\left(1-\frac{1}{4}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)$; ne segue che $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[4]{n^4-n^2+1}-n\right) = \boxed{-\dfrac{1}{4}}$;

(d) dato che $\left(\dfrac{n^3+5}{3-\ln(n)}\right) = \dfrac{n^3}{\ln(x)}\left(\dfrac{1+\frac{5}{n^3}}{\frac{3}{\ln(n)}-1}\right) \to -\infty$ e che $\arctan(x) \to \dfrac{\pi}{2}$ per $x\to-\infty$, si deduce che $\lim_{n\to\infty}\arctan\left(\dfrac{n^3+5}{3-\ln(n)}\right) = \boxed{-\dfrac{\pi}{2}}$.

□

4. Calcolare il limite (6 punti – DA SVOLGERE)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{(\pi-2x)\tan(x)-2}{(\pi-2x)^2}$$

Svolgimento. Conviene fare un cambio di variabile $y=\pi-2x$, di modo che

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{(\pi-2x)\tan(x)-2}{(\pi-2x)^2} = \lim_{y\to0^-}\frac{y\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)-2}{y^2} = \lim_{y\to0^-}\frac{y\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)}-2}{y^2} =$$

$$\lim_{y\to0^-}\frac{y\dfrac{\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}-2}{y^2} = \lim_{y\to0^-}\frac{y\cos\left(\frac{y}{2}\right)-2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)y^2}$$

È chiaro a questo punto che il limite si presenta nella forma 0/0 e quindi applicando la regola di de l'Hôpital (due volte)

$$\lim_{y\to0^-}\frac{y\cos\left(\frac{y}{2}\right)-2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}{y^2\sin\left(\frac{y}{2}\right)} = \lim_{y\to0^-}\frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right)-\frac{y}{2}\sin\left(\frac{y}{2}\right)-\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{2y\sin\left(\frac{y}{2}\right)+\frac{y^2}{2}\cos\left(\frac{y}{2}\right)} =$$

$$\lim_{y\to0^-}\frac{-\sin\left(\frac{y}{2}\right)}{4\sin\left(\frac{y}{2}\right)+y\cos\left(\frac{y}{2}\right)} = \text{(Hôp.)} \lim_{y\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{y}{2}\right)+\cos\left(\frac{y}{2}\right)-\frac{y}{2}\sin\left(\frac{y}{2}\right)} = \boxed{-\frac{1}{6}}.$$

□

5. In ognuno dei casi seguenti si indichi se la serie converge assolutamente (AC), converge ma non assolutamente (C) oppure non converge (NC) (punti 1.5/-0.75 per ognuna).

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n n}{n^3-n+1}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)$

Spiegazione. (a) Dato che $\sqrt[n^2]{2} \to 1$ (perché $(\sqrt[n^2]{2})$ è estratta da $(\sqrt[n]{2})$ che tende a uno) la serie $\boxed{\text{non può convergere}}$;

(b) poiché $\left|\frac{1+(-1)^n n}{n^3-n+1}\right| \leq \frac{1+n}{n^3-n+1} = \frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la serie $\boxed{\text{converge assolutamente}}$ (confrontando la serie dei moduli con la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$;

(c) si ha $\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = \ln\left(1-\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{\pi^2}{2n^2}\right)\right) = -\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{\pi^2}{2n^2}\right)$ per cui passando ai moduli (così si elimina il fattore $(-1)^n$) possiamo applicare il criterio del confronto con la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2n^2} < +\infty$; dunque la serie $\boxed{\text{converge assolutamente}}$;

(d) la serie non converge assoluatemente perché passando ai moduli si ha $\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \frac{\sqrt{2}}{n} + o\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)$, e quindi la serie dei moduli si confronta con la serie armonica di esponente uno $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ che diverge; peraltro la serie è a segni alterni e $n \mapsto \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)$ è decrescente, permettendo così di applicare il criterio di Leibniz; dunque $\boxed{\text{la serie converge, ma non assolutamente}}$.

□

6. Date due funzioni f e g definite in un intorno di zero tali che $f(x) = 1+3x-x^2+o(x^2)$, $g(x) = 1-3x-2x^2+o(x^2)$ e posto $h(x) := f(x)g(x)$ si ha (punti 2/-0.5):

(*a*) $h''(0) = -12$, (*b*) $h''(0) = -24$, (*c*) $h''(0) = -9$, (*d*) $h''(0) = -18$, (*e*) $h''(0) = -6$.

Spiegazione. Si ha:

$$h(x) = f(x)g(x) = (1+3x-x^2+o(x^2))(1-3x-2x^2+o(x^2)) =$$
$$1+3x-x^2+o(x^2)-3x-9x^2+o(x^2)-2x^2+o(x^2) = 1-12x^2+o(x^2) =$$
$$h(0)+h'(0)x+\frac{h''(0)}{2}x^2+o(x^2)$$

per l'unicità dello sviluppo di Taylor si ricava

$$h(0) = 1, \qquad h'(0) = 0, \qquad h''(0) = 2(-12) = \boxed{-24}.$$

□

7. Si calcoli il valore del seguente integrale improprio (punti 4):

$$\int_0^{+\infty} \sin(x)e^{-ax}\,dx$$

Spiegazione. Integriamo due volte per parti (prendendo la primitiva del seno/coseno e derivando l'esponenziale):

$$\int_0^{+\infty} \sin(x)e^{-ax}\,dx = \left[-\cos(x)e^{-ax}\right]_0^{+\infty} - a\int_0^{+\infty} \cos(x)e^{-ax}\,dx =$$
$$1 - a\left[\sin(x)e^{-ax}\right]_0^{+\infty} - a^2\int_0^{+\infty} \sin(x)e^{-ax}\,dx = 1 - a^2\int_0^{+\infty} \sin(x)e^{-ax}\,dx$$

e quindi (portando l'integrale a sinistra e dividendo tutto per $1+a^2$)

$$\int_0^{+\infty} \sin(x)e^{-ax}\,dx = \boxed{\frac{1}{1+a^2}}$$

□

8. Si consideri l'equazione differenziale (punti 8 in tutto DA SVOLGERE)

$$y' = \frac{2}{x^2-4}y - \frac{1}{(x-2)^2} \qquad -2 < x < 2.$$

(a) Per ogni y_0 in $\mathbb{R}$ si trovi l'espressione analitica della soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = y_0$.

(b) Si calcolino, al variare di y_0, i limiti di $y(x)$ per $x \to -2^+$ e per $x \to 2^-$.

(c) Si traccino i grafici delle soluzioni più signicative (sempre al variare di y_0), mettendone in evidenza gli intervalli di monotonia.

(d) Si trovi per quali valori di y_0 (se ce ne sono) per cui l'equazione $y(x) + 1 = 0$ ha due distinte soluzioni.

Svolgimento. Applichiamo la formula risolutiva per le equazioni del primo ordine fissando $x_0 = 0$; qui $a(x) = \dfrac{2}{x^2-4}$

$$A(x) = \int_0^x a(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)dt = \ln\left(\sqrt{\left|\frac{x-2}{x+2}\right|}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right)$$

(se $-2 < x < 2$). Dunque:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\left(y_0 - \int_0^x \sqrt{\frac{2+t}{2-t}}\frac{1}{(t-2)^2}\,dt\right) = \left(\text{sostituzione } s = \sqrt{\frac{2+t}{2-t}}\right)$$
$$\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\left(y_0 - \int_1^{\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}} \frac{s^2}{2}\,ds\right) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\left(y_0 - \left[\frac{s^3}{6}\right]_1^{\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}}\right) =$$
$$\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\left(y_0 - \frac{1}{6}\left(\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\right)^3 + \frac{1}{6}\right) = \left(y_0 + \frac{1}{6}\right)\sqrt{\frac{2-x}{2+x}} - \frac{1}{6}\frac{2+x}{2-x}$$

perchè $t = 2\dfrac{s^2-1}{s^2+1} = 2 - \dfrac{4}{s^2+1}$ e quindi $dt = \dfrac{8s}{(s^2+1)^2}ds$.

Allora si vede facilmente che:

$$\lim_{x\to-2^+} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 > -\frac{1}{6} \\ 0 & \text{se } y_0 = -\frac{1}{6} \\ -\infty & \text{se } y_0 < -\frac{1}{6} \end{cases}, \qquad \lim_{x\to 2^-} y(x) = -\infty.$$

□

Per studiare il segno di y' poniamo $F(x,y) := \dfrac{2}{x^2-4}y - \frac{1}{(x-2)^2}$ ricordando che $-2 < x < 2$ si ha:

$$F(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2-4}y \geq \frac{1}{(x-2)^2} \Leftrightarrow y \leq \frac{x^2-4}{2(x-2)^2} \left(= \frac{1}{2}\frac{x+2}{x-2} =: g(x) \right)$$

Quindi y cresce (decresce) se $y(x) < g(x)$ ($y(x) < g(x)$). Tracciaando il grafico di g (un ramo di iperbole che in -2 vale zero e tende a $-\infty$ per $x \to 2^-$) si ottengono i grafici rappresentati in figura (il grafico di g è in rosso tratteggiato). L'unica curva che in -2 tende a zero è quella con $y_0 = -\frac{1}{6}$; quelle con $y_0 < \frac{1}{6}$ prima salgono (da $-\infty$, raggiungono il massimo nel punto di intersezione col grafico di g e poi scendono a $-\infty$; le curve che partono con $y_0 > -\frac{1}{6}$ scendono sempre.

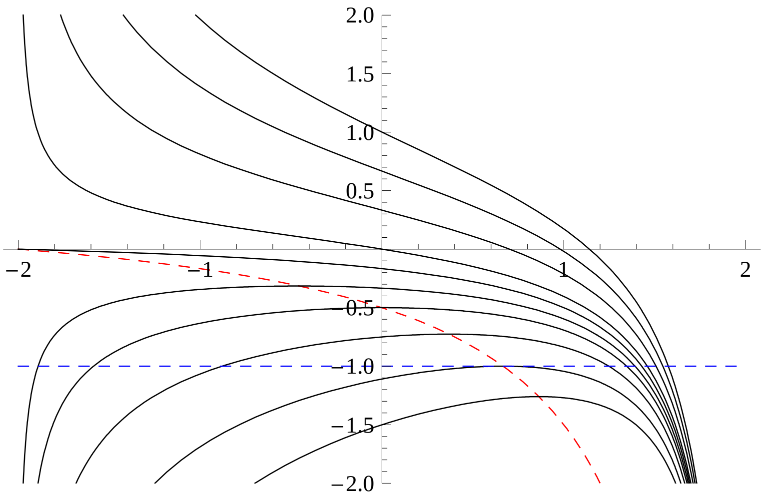


Figura 1: Grafici delle soluzioni

Per l'ultimo quesito conviene trovare l'intersezione tra il grafico di g e la retta $y = -1$ (linea blu tratteggiata nella figura). Questa si realizza nel punto $x = \dfrac{2}{3}$, come si vede facilmente. Se cerchiamo la soluzione che nel punto $x = \frac{2}{3}$ vale -1 troviamo, con semplici calcoli, che deve essere $y_0 = -\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$; questa soluzione è questa soluzione ha il suo massimo esattamente, nel punto $\left(\frac{2}{3}, -1\right)$, come si vede nella figura, e quindi questa curva taglia una sola volta la retta $y = -1$. Se $y_0 < -\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$ non ci sono soluzioni di $y(x) + 1 = 0$; se invece $y_0 > -\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$ ci sono due soluzioni dell'equazione, a patto che $y_0 < -\frac{1}{6}$ (perchè se no la soluzione è sempre decrescente e incrocia una sola volta la retta. Dunque ci sono due soluzioni di $y(x) + 1 = 0$ se e solo se $-\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\sqrt{2} < y_0 < -\frac{1}{6}$.