Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 1 settembre 2009

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := \dfrac{\ln(1+x^2)-x}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) := -1$, allora (1/-1 p.)
   (a) $f$ è continua su $\mathbb{R}$; (b) $f'(0)$ esiste e vale 1;
   (c) $f$ è limitata su $\mathbb{R}$; (d) $f$ è dispari su $\mathbb{R}$.

2. Se $A$ è l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : e^y \geq x + y \quad \forall y \in \mathbb{R}\}$ allora (2/-.5 punti) :

$$(a)\ \sup A = 0, (b)\ \sup A = \frac{1}{e}, (c)\ \sup A = 1, (d)\ \sup A = e, (e)\ \sup A = +\infty.$$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (3 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^9 + 5^{\sqrt{n}}}{1+n-n^6} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+6n+5}{3n^2+9n+3}\right)^n$$

4. Si calcoli il seguente limite di funzione (5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(6x)e^{18x^2} - 1}{\sin^2(x) - x^2}$$

5. Quali delle affermazioni sono vere per il seguente problema di Cauchy (1/-1 p.)

$$y'' + 9y = e^x, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

$$(a) \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0, \quad (b) \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty, \quad (c)\ y'(\pi) = \frac{e^\pi - 9}{10}, \quad (d)\ y(\pi) = \frac{e^\pi - 1}{10}.$$

6. Si indichi l'insieme degli $\alpha$ in $\mathbb{R}$ per cui la seguente serie numerica converge: (2/-0.5 p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha + n^{1-5\alpha}}{1+n^4}$$

$$(a) \left]-\infty, -\frac{2}{5}\right[,\ (b) \left]-\infty, -\frac{2}{5}\right[ \cup ]3, +\infty[,\ (c)\ ]3, +\infty[,\ (d) \left]-\frac{2}{5}, 3\right[,\ (e)\ \mathbb{R}.$$

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_{\sqrt[4]{3}}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^4}}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$(x+1)y' = 3y - \frac{2x^2+4x+2}{x+2}, \qquad (\text{per } x > -1), \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da $y_0$) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di $y_0$) i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (3 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di $y_0$ (1 p.);
   (d) si dica per quali valori di $y_0$ l'equazione $y(x) = \frac{1}{3}$ ha due soluzioni (1 p.).