Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 14 settembre 2009

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := \dfrac{\sin(|x|)}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) := 0$, allora (1/-1 p.)
   (a) f è continua su $\mathbb{R}$; (b) $f'(0)$ esiste e vale 0;
   (c) f è limitata su $\mathbb{R}$; (d) f è dispari su $\mathbb{R}$.

2. Se A è l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : \ln(y) \leq x + y \quad \forall y > 0\}$ allora (2/-.5 punti) :

$$(a)\ \inf A = -1, (b)\ \inf A = 1, (c)\ \inf A = \frac{1}{e}, (d)\ \inf A = e, (e)\ \inf A = +\infty.$$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (3 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^9 + 2^n}{1 - 10^{\sqrt{n}} - n^6} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4 + 2n^2 + 1}{n^4 - 2n^2 + 1}\right)^{n^2}$$

4. Si calcoli il seguente limite di funzione (5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1}{\ln(1-x) + x}$$

5. Quali delle affermazioni sono vere per il seguente problema di Cauchy (1/-1 p.)

$$y'' + 3y' = \cos(x), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

$$(a) \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0, \quad (b) \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty, \quad (c)\, y'(\pi) = -3\frac{e^{-3\pi}+1}{10}, \quad (d)\, y(\pi) = \frac{e^{-3\pi}+1}{10}.$$

6. Si indichi l'insieme degli α in $\mathbb{R}$ per cui la seguente serie numerica converge: (2/-0.5 p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^\alpha + n^{1-5\alpha}}$$

$$(a) \left]-\infty, -\frac{2}{5}\right[, \ (b) \left]-\infty, -\frac{2}{5}\right[\cup]3, +\infty[, \ (c)\ ]3, +\infty[, \ (d) \left]-\frac{2}{5}, 3\right[, \ (e)\ \mathbb{R}.$$

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$(x+1)y' = 3y + \frac{2x^2 + 4x + 2}{x+2}, \qquad (\text{per } x > -1), \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (3 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (1 p.);
   (d) si dica per quali (eventuali) valori di y_0 l'equazione $y(x) + \frac{1}{3} = 0$ ha due soluzioni (1 p.).