Analisi Matematica I - Ing. Aerospaziale/Sicurezza - Prova scritta del 29 maggio 2003 - A -

Cognome ______________________ Nome ______________________

- Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{4x}}{(x+2)\sqrt{2-x}}\,dx = \underline{\hspace{6cm}} \text{(5 p.)}$$

$$\int_0^\pi x\sin(5x)\,dx = \underline{\hspace{6cm}} \text{(3 p.)}$$

$$\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} |x|\sin(x^2) = \underline{\hspace{6cm}} \text{(3 p.)}$$

$$\int_0^4 \sqrt{1+\tan^2(x)}\,dx = \underline{\hspace{6cm}} \text{(4 p.)}$$

- Si dica per quali valori del parametro reale α risulta convergente il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-e^{-x}}{x^\alpha(1+x^5)}\,dx$$

α ______________________ (4 p.)

- Si dica quanto fa la somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{2^n} = \underline{\hspace{4cm}} \text{ (3 p.)}$$

- Sia data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = xy + 5y$. Si scriva l'equazione del piano tangente nel punto $(1,1)$ (per motivi di spazio scriviamo i vettori come righe):

$$z = \underline{\hspace{6cm}} \text{ (2 p.)}$$

Si trovino tutti i punti critici di f (non sono più di quattro!) (2 p.):

$(x_1, y_1) =$ ____________ , $(x_2, y_3) =$ ____________ , $(x_3, y_3) =$ ____________ , $(x_4, y_4) =$ ____________ ,

Si dica se (2 p.) (suggerimento: esaminare le linee di livello "critiche")

f ha minimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$ f ha massimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$

- Si consideri l'equazione differenziale (questo esercizio vale 10 p. in tutto)

$$y' = \frac{2}{x}y - x + 8 \quad , \quad y(4) = y_0 \qquad (x > 0)$$

· Si scriva la soluzione:

$y(x) =$ ______________________________

· Si trovino (eventualmente al variare di y_0 - non ci sono più di tre casi!)

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}, \quad \lim_{x\to 0^+} y(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

· Si disegnino i grafici delle soluzioni, al variare del dato iniziale y_0, cercando di dare l'idea del comportamento delle soluzioni. Per questo e' opportuno tracciare i grafici per i valori più "significativi" di y_0 (indicando tali valori)

· Si dica per quali valori del punto iniziale y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha almeno una soluzione $x > 0$: y_0______________

Analisi Matematica I - Ing. Aerospaziale/Sicurezza - Prova scritta del 29 maggio 2003 - B -

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

- Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{5x}}{(x+2)\sqrt{2-x}}\,dx = \underline{\hspace{6cm}} \text{(5 p.)}$$

$$\int_0^{\pi} x\sin(2x)\,dx = \underline{\hspace{6cm}} \text{(3 p.)}$$

$$\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} |x|\sin(x^2) = \underline{\hspace{6cm}} \text{(3 p.)}$$

$$\int_0^3 \sqrt{1+\tan^2(x)}\,dx = \underline{\hspace{6cm}} \text{(4 p.)}$$

- Si dica per quali valori del parametro reale α risulta convergente il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-e^{-x}}{x^{\alpha}(1+x^2)}\,dx$$

α ____________________ (4 p.)

- Si dica quanto fa la somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{3^n} = \underline{\hspace{4cm}} \text{ (3 p.)}$$

- Sia data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = xy + 4y$. Si scriva l'equazione del piano tangente nel punto $(1,1)$ (per motivi di spazio scriviamo i vettori come righe):

$$z = \underline{\hspace{6cm}} \text{ (2 p.)}$$

Si trovino tutti i punti critici di f (non sono più di quattro!) (2 p.):

$(x_1, y_1) =$ __________ , $(x_2, y_3) =$ __________ , $(x_3, y_3) =$ __________ , $(x_4, y_4) =$ __________ ,

Si dica se (2 p.) (suggerimento: esaminare le linee di livello "critiche")

f ha minimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$ f ha massimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$

- Si consideri l'equazione differenziale (questo esercizio vale 10 p. in tutto)

$$y' = \frac{2}{x}y - x + 10 \quad , \quad y(5) = y_0 \qquad (x > 0)$$

· Si scriva la soluzione:

$y(x) =$ ____

· Si trovino (eventualmente al variare di y_0 - non ci sono più di tre casi!)

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}, \quad \lim_{x\to 0^+} y(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

· Si disegnino i grafici delle soluzioni, al variare del dato iniziale y_0, cercando di dare l'idea del comportamento delle soluzioni. Per questo e' opportuno tracciare i grafici per i valori più "significativi" di y_0 (indicando tali valori)

· Si dica per quali valori del punto iniziale y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha almeno una soluzione $x > 0$: y_0____________________

Analisi Matematica I - Ing. Aerospaziale/Sicurezza - Prova scritta del 29 maggio 2003 - C -

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

- Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{6x}}{(x+2)\sqrt{2-x}}\,dx = \rule{6cm}{0.4pt} \text{(5 p.)}$$

$$\int_0^\pi x\sin(3x)\,dx = \rule{6cm}{0.4pt} \text{(3 p.)}$$

$$\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} |x|\sin(x^2) = \rule{6cm}{0.4pt} \text{(3 p.)}$$

$$\int_0^2 \sqrt{1+\tan^2(x)}\,dx = \rule{6cm}{0.4pt} \text{(4 p.)}$$

- Si dica per quali valori del parametro reale α risulta convergente il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-e^{-x}}{x^\alpha(1+x^3)}\,dx$$

α ____________________ (4 p.)

- Si dica quanto fa la somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{6^n} = \rule{4cm}{0.4pt} \text{ (3 p.)}$$

- Sia data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = xy + 3y$. Si scriva l'equazione del piano tangente nel punto $(1,1)$ (per motivi di spazio scriviamo i vettori come righe):

$$z = \rule{6cm}{0.4pt} \text{ (2 p.)}$$

Si trovino tutti i punti critici di f (non sono più di quattro!) (2 p.):

$(x_1, y_1) =$ __________ , $(x_2, y_3) =$ __________ , $(x_3, y_3) =$ __________ , $(x_4, y_4) =$ __________ ,

Si dica se (2 p.) (suggerimento: esaminare le linee di livello “critiche”)

f ha minimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$ $\qquad$ f ha massimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$

- Si consideri l'equazione differenziale (questo esercizio vale 10 p. in tutto)

$$y' = \frac{2}{x}y - x + 12 \quad , \quad y(6) = y_0 \qquad (x > 0)$$

· Si scriva la soluzione:

$y(x) =$ ____

· Si trovino (eventualmente al variare di y_0 - non ci sono più di tre casi!)

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \begin{cases} \underline{\hspace{3cm}} & \text{se } y_0\underline{\hspace{3cm}} \\ \underline{\hspace{3cm}} & \text{se } y_0\underline{\hspace{3cm}} \\ \underline{\hspace{3cm}} & \text{se } y_0\underline{\hspace{3cm}} \end{cases}, \lim_{x\to 0^+} y(x) = \begin{cases} \underline{\hspace{3cm}} & \text{se } y_0\underline{\hspace{3cm}} \\ \underline{\hspace{3cm}} & \text{se } y_0\underline{\hspace{3cm}} \\ \underline{\hspace{3cm}} & \text{se } y_0\underline{\hspace{3cm}} \end{cases}$$

· Si disegnino i grafici delle soluzioni, al variare del dato iniziale y_0, cercando di dare l'idea del comportamento delle soluzioni. Per questo e' opportuno tracciare i grafici per i valori più "significativi" di y_0 (indicando tali valori)

· Si dica per quali valori del punto iniziale y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha almeno una soluzione $x > 0$: y_0____________________

Analisi Matematica I - Ing. Aerospaziale/Sicurezza - Prova scritta del 29 maggio 2003 - D -

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

- Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{2x}}{(x+2)\sqrt{2-x}}\,dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \text{(5 p.)}$$

$$\int_0^{\pi} x\sin(4x)\,dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \text{(3 p.)}$$

$$\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} |x|\sin(x^2) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \text{(3 p.)}$$

$$\int_0^5 \sqrt{1+\tan^2(x)}\,dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \text{(4 p.)}$$

- Si dica per quali valori del parametro reale α risulta convergente il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-e^{-x}}{x^{\alpha}(1+x^4)}\,dx$$

α ____________________ (4 p.)

- Si dica quanto fa la somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{8^n} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \text{(3 p.)}$$

- Sia data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = xy + 2y$. Si scriva l'equazione del piano tangente nel punto $(1,1)$ (per motivi di spazio scriviamo i vettori come righe):

$$z = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \text{(2 p.)}$$

Si trovino tutti i punti critici di f (non sono più di quattro!) (2 p.):

$(x_1, y_1) =$ ____________ , $(x_2, y_3) =$ ____________ , $(x_3, y_3) =$ ____________ , $(x_4, y_4) =$ ____________ ,

Si dica se (2 p.) (suggerimento: esaminare le linee di livello "critiche")

f ha minimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$ f ha massimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$

- Si consideri l'equazione differenziale (questo esercizio vale 10 p. in tutto)

$$y' = \frac{2}{x}y - x + 4 \quad , \quad y(2) = y_0 \qquad (x > 0)$$

· Si scriva la soluzione:

$$y(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

· Si trovino (eventualmente al variare di y_0 - non ci sono più di tre casi!)

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} & \text{se } y_0 \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \text{se } y_0 \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \text{se } y_0 \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}, \quad \lim_{x \to 0^+} y(x) = \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} & \text{se } y_0 \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \text{se } y_0 \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \text{se } y_0 \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

· Si disegnino i grafici delle soluzioni, al variare del dato iniziale y_0, cercando di dare l'idea del comportamento delle soluzioni. Per questo e' opportuno tracciare i grafici per i valori più "significativi" di y_0 (indicando tali valori)

· Si dica per quali valori del punto iniziale y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha almeno una soluzione $x > 0$: $y_0 \underline{\hspace{4cm}}$