Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 26 gennaio 2010

(a.1) Data la successione di funzioni $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da

$$f_n(x) := \frac{n^\alpha x}{(n^2 + |x|)^2}.$$

1. Si dica per quali α in $\mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente su $]-\infty, \infty[$.
2. Si determini se per i valori di α trovati al punto precedente la somma $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ della serie è continua su $\mathbf{R}$.
3. (*) Si dica per quali α la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su $\mathbf{R}$.

(a.2) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 2x + 2}\, dx$$

(b.1) Data la successione di funzioni $f_n :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ definite da

$$f_n(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{x}(n^\alpha + x^2)}.$$

1. Si dica per quali α in $\mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1(]0, +\infty[)$.
2. Si dica se per $\alpha = 1$ la serie converge in $L^2(]0, +\infty[)$.
3. (*) Si dica per quali $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1(]0, 1])$.

(b.2) Si trovi la soluzione del problema differenziale di $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' - y = \operatorname{sgn}(t) e^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}$$

dove $\operatorname{sgn}(x) = 1$ se $x > 0$ e $\operatorname{sgn}(x) = -1$ se $x < 0$.

(c.1) Si trovi la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 17y = \delta' \\ y = 0 \text{ su }]-\infty, 0[\end{cases}$$

e trovata la soluzione y si calcolino y' e y''.

(c.2) Utilizzando la trasformata di Fourier si trovino tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = \delta \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

Aiuto: se $P(z) = z^3 - z^2 + z - 1$ allora $P(i\omega) = -i(\omega + i)(\omega + 1)(\omega - 1)$.

Complementi di Matematica 26/1/2010

(e.1) $$f_n(x) = \frac{n^\alpha x}{(n^2+|x|)^2}$$

1. Conv. puntuale: fissato x si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha x}{(n^2+|x|)^2} = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-4} \frac{x}{\left(1+\frac{|x|}{n^2}\right)^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha<4 \\ x & \text{se } \alpha=4 \text{ o } x=0 \\ \pm\infty & \text{se } x\neq 0 \text{ e } \alpha>4 \end{cases}$$

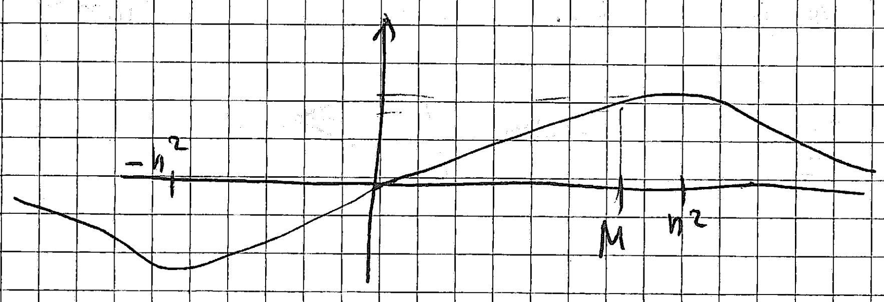
Quindi è comunque necessario $\alpha<4$ perché la serie converga. Dato che per $\alpha<4$ $f_n(x) \simeq \frac{x}{n^{4-\alpha}}$ per avere la convergenza è necessario e suff. $4-\alpha>1 \iff \boxed{\alpha<3}$

2 Studiamo f_n come funzione di x: f_n è dispari

$f_n(0)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} f_n(x)=0$ e se $x>0$

$$f_n'(x) = n^\alpha \frac{(n^2+x)^2 - x\cdot 2(n^2+x)}{(n^2+x)^4} = \frac{n^\alpha}{(n^2+x)^3}(n^2-x)$$

che si annulla per $x=n^2$ — Si ottiene il grafico



(per $x<0$ si usa la disparità), $f_n(n^2) = \frac{n^{\alpha+2}}{(2n^2)^2} = \frac{n^{\alpha-2}}{4}$

ORA se consideriamo $\|f_n\|_{\infty,[-M,M]}$, avendo fissato a priori $M>0$, si ha che per n grande $n^2\geq M$ e quindi

$$\|f_n\|_{\infty,[-M,M]} = f_n(M) \simeq \frac{M}{n^{4-\alpha}}$$ per cui,

se $\boxed{\alpha<3}$ la serie converge totalmente su $[-M,M]$ e dunque la sua somma è continua in X.

3. A causa del punto 2 si ha

$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{n^{\alpha-2}}{4}$ per cui la serie conv. totalmente su $\mathbb{R}$ per $2-\alpha > 1 \iff \boxed{\alpha < 1}$. Dico che la serie ~~non~~ converge se $\alpha \geq 1$. Infatti se lo facesse ne seguirebbe

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_n f_n(x) = \sum_n \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_n 0 = 0$$

Però se $x>0$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \geq \sum_{n=1}^{[x]} f_n(x) \geq \sum_{n=1}^{[x]} \frac{n^\alpha x}{([x]^2+x)^2} \geq$$

$$\frac{x}{(x^2+x)^2} \sum_{n=1}^{[x]} n = \frac{1}{x(1+x)^2}$$

Però se prendo m intero $(\alpha \geq 1)$

$$S(m^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha m^2}{(n^2+m^2)^2} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{n^\alpha m^2}{(n^2+m^2)^2} \geq$$

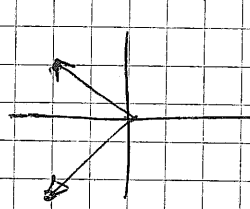
$$\sum_{n=1}^{m} \frac{n^\alpha m^2}{(m^2+m^2)^2} = \frac{m^2}{4m^4} \sum_{n=1}^{m} n^\alpha \geq \frac{1}{4m^2} \sum_{n=1}^{m} n$$

$$= \frac{1}{4m^2} \frac{(m+1)(m)}{2} \longrightarrow \frac{1}{8} \neq 0 \qquad \text{ASSURDO}$$

(a.2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+2x+2} = (*)$

Per la formula l'integrale vale $\dfrac{2\pi i}{1-e^{\frac{2\pi}{3}i}} \sum$ Residui nei poli

e i poli sono $z_{12} = \boxed{-1 \pm i}$



$$\mathrm{Res}\left(\frac{\sqrt[3]{z}}{z^2+2z+2}, z_j\right) = \left.\frac{\sqrt[3]{z}}{2z+2}\right|_{z=z_j}$$

ricordando che $\sqrt[3]{\rho e^{i\theta}} = \rho^{1/3} e^{i\theta/3}$ se $0<\theta<2\pi$

$$\mathrm{Res}(-1+i) = \mathrm{Res}\left(\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi i}{4}}\right) =$$

$$\frac{\sqrt[6]{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}}{-2+2i+2} = \frac{\sqrt[6]{2}}{2i}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{Res}(-1-i) = \mathrm{Res}\left(\sqrt{2}\, e^{\frac{5}{4}\pi i}\right) = \frac{\sqrt[6]{2}}{-2-2i+2}\, e^{\frac{5}{12}\pi i} =$$

$\dfrac{\sqrt[6]{2}}{-2i}\, e^{\frac{5}{12}\pi i}$. Allora

$$(*) = \frac{\cancel{2\pi i}}{1-e^{\frac{2\pi}{3}i}}\,\frac{\sqrt[6]{2}}{\cancel{2i}}\left(e^{\frac{\pi}{4}i} - e^{\frac{5}{12}\pi i}\right) =$$

$$\frac{\sqrt[6]{2}\;\pi}{\left(e^{-\frac{\pi}{3}i} - e^{\frac{\pi}{3}i}\right) e^{\frac{\pi}{3}i}} \cdot e^{\frac{\pi}{3}i}\left(e^{-\frac{1}{12}\pi i} - e^{\frac{\pi}{12}i}\right)$$

$$= \boxed{\sqrt[6]{2}\,\pi\,\frac{\sin(\pi/12)}{\sin(\pi/3)}}$$

(b.1) $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}\,(n^\alpha + x^2)}$ su $]0,+\infty[$

(1) $\|f_n\|_1 =$

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \left(x = n^{\frac{\alpha}{2}} y \Rightarrow x^2 = n^\alpha y^2 ,\ dx = n^{\frac{\alpha}{2}} dx \right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^{\alpha/2}\,dy}{n^{\frac{\alpha}{6}}\, n^\alpha (1+y^2)\sqrt[3]{y}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)\sqrt[3]{y}}$$

$\Rightarrow$ Se $\frac{2}{3}\alpha > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ conv. in L^1. Questo equivale a $\boxed{\alpha > \frac{3}{2}}$

Peraltro questa condizione è anche necessaria perché se $\sum f_n$ conv. in $L^1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2}$ (dato che $f_n \geq 0$) $= +\infty$ se $\alpha \leq \frac{3}{2}$

(2) $$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{+\infty} \frac{n^{\alpha/2}\,dy}{\left(n^{\frac{\alpha}{6}}\, n^\alpha (1+y^2)\right)^2} = \frac{1}{n^{(11/6)\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt[3]{y^2}(1+y^2)^2}$$

$\Rightarrow \|f_n\|_2 = \frac{1}{n^{\frac{11}{12}\alpha}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^2} \right)^{1/2}$ per cui se $\alpha = 1$

$\|f_n\|_2 = \frac{1}{n^{11/12}} \cdot$ costante. Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11/12}} = +\infty$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ <u>non conv.</u> in L^2 (in realtà non è proprio chiaro, ma è vero . . .)

(3) Se mi metto in $[0,1]$ e ragiono come in 1 :

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{n^{-\alpha/2}} \frac{dy}{\sqrt[3]{y}(1+y^2)} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}\alpha}} \simeq \frac{1}{n^{\frac{2}{3}\alpha}} \int_0^{n^{-\alpha/2}} \frac{1}{y^{1/3}}\,dy =$$

$\frac{3}{2} \frac{1}{n^{2/3\,\alpha}} \left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \frac{1}{n^\alpha}$ che dà origine a una serie

conv. se e solo se $\boxed{\alpha > 1}$

(b.2) $y'' - y = \operatorname{sgn}(t)\, e^{-|t|}$

Trasformo $f(t) = \operatorname{sgn}(t)\, e^{-|t|}$

$$\hat f(\omega) = -\int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t} e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$-\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+i\omega)t}\, dt = \left[\frac{-e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega}\right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{e^{-(1+i\omega)}}{1+i\omega}\right]_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{-1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \frac{-1-i\omega+1-i\omega}{1+\omega^2} = \boxed{\frac{-2i\omega}{\omega^2+1}}$$

Trasformando l'equazione

$$(-\omega^2 - 1)\,\hat y = \frac{-2i\omega}{\omega^2+1} \iff \hat y(\omega) = \frac{2i\omega}{(\omega^2+1)^2}$$

Ci sono due poli doppi in $\pm i$. Se $g(z) = \dfrac{2ize^{itz}}{(z^2+1)^2}$

$$\operatorname{Res}(g, i) = \frac{d}{dz}\,\frac{2ize^{itz}}{(z+i)^2}\Big|_{z=i} =$$

$$\frac{(2ie^{itz} + 2iz\,it\,e^{itz})(z+i)^2 - 2ize^{itz}\,2(z+i)}{(z+i)^4}\Big|_{z=i} =$$

$$\frac{(2ie^{-t} + 2ite^{-t})(-4) + 2e^{-t}\cdot 2\cdot 2i}{16} =$$

$$\boxed{\frac{it}{2}e^{-t}}$$

$$\operatorname{Res}(g, -i) = \frac{d}{dz}\,\frac{2ize^{itz}}{(z-i)^2}\Big|_{z=-i} =$$

$$\frac{(2ie^{itz} + 2iz\cdot it\,e^{itz})(z-i)^2 - 2ize^{itz}\cdot 2(z-i)}{(z-i)^4}\Big|_{z=-i} =$$

$$\frac{(2ie^{t} + 2ite^{t})(-4) - 2e^{t}\cdot 2(-2i)}{16} = -\frac{it}{2}e^{t}$$

Dunque $y(t) = \begin{cases} i\,\dfrac{it}{2}e^{-t} & \text{se } t>0 \\ -i\,\dfrac{-it}{2}e^{t} & \text{se } t<0 \end{cases} = -\dfrac{te^{-|t|}}{2}$

(C.1) $\begin{cases} y'' + 2y' + 17y = \delta' \\ y = 0 \text{ su }]-\infty, 0[\end{cases}$

Trasformiamo mediante Laplace

$$\tilde{y}(z)(z^2 + 2z + 17) = z \iff \tilde{y}(z) = \frac{z}{z^2+2z+17}$$

Ci sono due radici semplici del denominatore che sono $-1 \pm \sqrt{1-17} = -1 \pm 4i$. Ci servono i residui di $g(z) = \frac{z e^{zt}}{z^2+2z+17}$ nei due poli.

$$\mathrm{Res}(g, -1+4i) = \left.\frac{z e^{zt}}{2z+2}\right|_{z=-1+4i} = \frac{(-1+4i) e^{(-1+4i)t}}{-2+8i+2} =$$

$$\frac{e^{-t}}{8}(-i)(-1+4i)e^{4it} = \frac{e^{-t}}{8}(4+i)e^{4it}$$

$$\mathrm{Res}(g, -1-4i) = \overline{\mathrm{Res}(g, -1+4i)} = \frac{e^{-t}}{8}(4-i)e^{-4it}$$

$$\Rightarrow y(t) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{e^{-t}}{8}(4+i)e^{4it}\right) =$$

$$\frac{e^{-t}}{4}(4\cos(4t) - \sin(4t)) \quad \text{se} \quad t > 0$$

e quindi $y(t) = \frac{H(t)}{4} e^{-t}(4\cos(4t) - \sin(4t))$

Facciamo le derivate:

$$y'(t) = \frac{\delta}{4} e^{-t}(4\cos(4t) - \sin(4t)) +$$

$$- \frac{H(t)}{4} e^{-t}(4\cos(4t) - \sin(4t)) +$$

$$+ \frac{H(t)}{4} e^{-t}(-16\sin(4t) - 4\cos(4t)) =$$

$$\delta + \frac{H(t)}{4} e^{-t}(-8\cos(4t) - 15\sin(4t))$$

$$y''(t) = \delta' + \frac{\delta}{4} e^{-t}(-8\cos(4t) - 15\sin(4t))$$

$$- \frac{H(t)}{4} e^{-t} \left(-8\cos(4t) - 15\sin(4t)\right)$$

$$+ \frac{H(t)}{4} e^{-t} \left(32\sin(4t) - 60\cos(4t)\right) =$$

$$\delta' - 2\delta + \frac{H(t)}{4} e^{-t} \left(-52\cos(4t) + 47\sin(4t)\right)$$

VERIFICHIAMO CHE VALE L'EQ (non era richiesto!)

$$y'' + 2y' + 17y =$$

$$\delta' \cancel{-2\delta} \cancel{+2\delta} + \frac{H(t)}{4} e^{-t} \Big\{ -52\cancel{\cos(4t)} + 47\cancel{\sin(4t)}$$

$$-16\cancel{\cos(4t)} - 30\cancel{\sin(4t)} + 68\cancel{\cos(4t)} - 17\cancel{\sin(4t)} \Big\} = \delta'$$

OK.

(C.2) $\quad y''' - y'' + y' - y = \delta \qquad y \in \mathcal{S}'$

Trasformiamo con Fourier

$$\left((+i\omega)^3 - (i\omega)^2 + (i\omega) - 1\right)\hat{y} = 1$$

$$-i(\omega+i)(\omega-1)(\omega+1)\,\hat{y} = 1 \quad (*)$$

Per trovare tutte le $\hat{y}$ che verificano $(*)$ devo trovarne una ~~-~~ $(\hat{y}_1)$ e sommarci tutte le sol. di

$$-i(\omega+i)(\omega-1)(\omega+1)\,\hat{y} = 0$$

che sono del tipo $\lambda\,\delta_1 + \mu\,\delta_{-1} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C})$

La soluzione particolare si trova scrivendo

$$\frac{1}{-i(\omega+i)(\omega-1)(\omega+1)} = \frac{i}{(\omega+i)(\omega-1)(\omega+1)} = \frac{A}{\omega+i} + \frac{B}{\omega-1} + \frac{C}{\omega+1}$$

(riduzione in fratti semplici) $\Rightarrow$

$$A = \left.\frac{i}{(\omega-1)(\omega+1)}\right|_{\omega=-i} = \frac{i}{-2} = \boxed{-\frac{i}{2}}$$

$$B = \frac{i}{(\omega+i)(\omega+1)}\Big|_{\omega=1} = \frac{i}{(1+i)\,2} = \frac{i(1-i)}{4} = \frac{1+i}{4}$$

$$C = \frac{i}{(\omega+i)(\omega-1)}\Big|_{\omega=-1} = \frac{i}{(-1+i)(-2)} = \frac{i(-1-i)}{-2\cdot 2} = \frac{-1+i}{4}$$

Dunque

$$\hat{y}_1 = \overbrace{-\frac{i}{2}\frac{1}{\omega+i}}^{1} + \overbrace{\frac{1+i}{4}\frac{1}{\omega-1}}^{2} + \overbrace{\frac{-1+i}{4}\frac{1}{\omega+1}}^{3}$$

Per antitrasformare 1 posso usare i residui: per $t<0$ trovo

$$-i\,\mathrm{Res}\left(-\frac{i}{2}\frac{e^{i\cancel{z}t}}{z+i}, -i\right) = -i\cdot\left(-\frac{i}{2}\right)e^{t}$$

Dunque l'antitrasformata di 1 è $\boxed{-H(-t)\frac{e^{t}}{2}}$

Per quanto riguarda 2 e 3 ricordiamo che

$$\mathcal{F}\left(e^{i\omega_0 t}\,\mathrm{sgn}(t)\right) = \frac{-2i}{\omega-\omega_0}, \text{ da cui:}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1+i}{4}\frac{1}{\omega-1}\right) = \frac{1+i}{4}\frac{1}{-2i}e^{it}\,\mathrm{sgn}(t) = \frac{-1+i}{8}e^{it}\,\mathrm{sgn}(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{-1+i}{4}\frac{1}{\omega+1}\right) = \frac{-1+i}{4}\frac{1}{-2i}e^{-it}\,\mathrm{sgn}(t) = \frac{-1-i}{8}e^{-it}\,\mathrm{sgn}(t)$$

$\Rightarrow$

$$y_1(t) = \cancel{-H(t)\frac{e^{t}}{2}} - \frac{H(-t)}{2}e^{t} + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{-1+i}{8}e^{it}\right)\mathrm{sgn}(t)$$

$$= -\frac{H(-t)}{2}e^{t} + \frac{-\cos(t)-\sin(t)}{4}\,\mathrm{sgn}(t) =$$

$$\boxed{-\frac{H(-t)}{2}e^{t} - \frac{\cos(t)+\sin(t)}{4}\,\mathrm{sgn}(t)}$$

e $\boxed{y(t) = y_1(t) + \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}}$