Matematica - Ingegneria Gestionale
Compito del 10 gennaio 2005 - Testo e soluzioni

- Data la successione $a_n := n^2 - 5n + 4$ si chiede di trovare $\inf a_n$ e $\sup a_n$. Si vede facilmente che la funzione $f(x) := x^2 - 5x + 4$ rappresenta una parabola che ha concavità verso l'alto e assume minimo nel punto $x = 5/2$. Quindi $a_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ per cui $\boxed{\sup a_n = +\infty}$. Per quanto riguarda l'estremo inferiore NON si può dire che $\inf a_n = \inf f(x)$ (perché a_n è definita solo sui numeri interi e $5/2$ non è intero). Però dal fatto che $f(x)$ cresce per $x \geq 5/2$ e decresce per $x \leq 5/2$ si deduce facilmente che a_n assume valore minimo o in $n = 2$ oppure in $n = 3$. Si verifica subito che $\boxed{a_2 = a_3 = -2 = \inf a_n}$.

- Si ha
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(n^2)^n} = \lim_{n\to+\infty} n^{n^2-2n} = \lim_{n\to+\infty} \ln(n^2-2n)e^n = +\infty$$

- Si richiede di dire per ognula delle quattro serie che seguono se si ha la convergenza assoluta ($\boxed{\text{AC}}$), la convergenza semplice (senza la convergenza assoluta, $\boxed{\text{C}}$) oppure se la serie non converge ($\boxed{\text{NC}}$). Allora
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Longrightarrow \boxed{\text{C}}$$
(converge per Leibniz, mentre la serie dei valori assoluti è armonica di esponente 1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} \Longrightarrow \boxed{\text{AC}} \qquad \text{perché } \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \Longrightarrow \boxed{\text{NC}} \qquad \text{perché } n\sin\left(\frac{1}{n}\right) \to 1 \ (\neq 0)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \Longrightarrow \boxed{\text{NC}} \qquad \text{perché } n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ è asintotica a } \frac{1}{n} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

- Si chiede di dire quante sono le soluzioni positive dell'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$. Posto $f(x) := x^3 - 3x + 1 = 0$ studiamo f su $[0, +\infty[$. È facile vedere che
$$f(0) = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad f'(x) = 3x^3 - 3 \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$
quindi f ha un minimo relativo in $x = 1$. Dato che $f(1) = -1$, $f(x)$ attraversa lo zero due volte quando x varia tra i numeri positivi. La risposta è dunque $\boxed{\text{due soluzioni}}$.

- Si chiede di trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = -x/y$ con dato iniziale $y(1) = -1$ oppure $y(1) = 2$. Si tratta di un' equazione a variabili separabili. Dato che né -1 né 2 annullano la funzione $-1/y$ le soluzioni, in entrambi i casi, devono verificare la condizione $y(x)^2 = -x^2 + \textit{costante}$. Nel primo caso (dato che

$y(1)$ deve essere negativo) deve essere $y(x) = -\sqrt{c - x^2}$ da cui ricavando c si ha $\boxed{y(x) = -\sqrt{2 - x^2}}$. Ne secondo caso si ottiene invece $\boxed{y(x) = \sqrt{5 - x^2}}$. Andrebbe notato (anche se non era richiesto) che le soluzioni NON esistono per tutte le x, come è normale in questo tipo di equazioni. L'intervallo di esistenza massimale (diverso soluzione per soluzione) è esattamente l'intervallo delle x per cui l'espressione dentro la radice è maggiore o eguale a zero ($[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]/[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$).

- Si deve calcolare
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + 2x + 2}\, dx$$
Usando la sostituzione $y = x + 1$ si ha
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + 2x + 2}\, dx = \int_{0}^{2} \sqrt{y^2 + 1}\, dy$$
A questo punto si può fare così(usando alla fine l'integrazione per parti):
$$\int_0^2 \sqrt{y^2+1}\, dy = \int_0^2 \frac{y^2+1}{\sqrt{y^2+1}}\, dy = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\, dy + \int_0^2 y \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\, dy =$$
$$[\mathrm{settsinh}(y)]_{y=0}^{y=2} + \left[y\sqrt{y^2+1}\right]_{y=0}^{y=2} - \int_0^2 \sqrt{y^2+1}\, dy =$$
$$\mathrm{settsinh}(2) + 2\sqrt{5} - \int_0^2 \sqrt{y^2+1}\, dy$$
Quindi
$$\int_0^2 \sqrt{y^2+1}\, dy = \boxed{\frac{\mathrm{settsinh}(2)}{2} + \sqrt{5}}$$

- Si chiede di calcolare
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(\cos^2(2x) + 4x^2\right)}{x(x - \tan(x))}$$
Usiamo Taylor. Si ha
$$\cos(2x) = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4 + o((2x)^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4);$$
$$\ln(\cos^2(2x)) = 2\ln(\cos(2x)) = 2\ln\left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) =$$
$$2 \quad \left\{-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)^2 + o\left(\left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)^2\right)\right\} =$$
$$2 \quad \left\{-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(-2x^2 + o(x^2)\right)^2 + o\left(\left(O(x^2)\right)^2\right)\right\} =$$
$$2 \quad \left\{-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - 2x^4 + o(x^4)\right\} = -4x^2 - \frac{8}{3}x^4 + o(x^4);$$
$$x(x - \tan(x)) = x(x - x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) = x(-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) = -\frac{1}{3}x^4 + o(x^4).$$

Da cui

$$\frac{\ln\left(\cos^2(2x)+4x^2\right)}{x(x-\tan(x))} = \frac{-\frac{8}{3}x^4+o(x^4)}{-\dfrac{1}{3}x^4+o(x^4)} \to \boxed{8}$$