MATEMATICA - Ingegneria Gestionale - Compito del 12 luglio 2004 SOLUZIONI

A1 Dato α in $\mathbf{R}$ (a_n) è definita da $a_n := \dfrac{n^k + (-1)^n n^\alpha}{5 + n^k}$. Allora $a_n = b_n + (-1)^n c_n$ dove $a_n = \dfrac{n^k}{5+n^k}$ e $c_n = \dfrac{n^\alpha}{5+n^k}$. Si vede che $a_n \to 1$ mentre $c_n \to 0$, se $\alpha < k$, $c_n \to 1$, se $\alpha = k$ e $c_n \to +\infty$, se $\alpha > k$. Allora $(-1)^n c_n \to 0$ se $\alpha < k$, non ha limite pur essendo limitata se $\alpha = k$, non è limitata e non ha limite se $\alpha > k$. Quindi

(a_n) è limitata per $\boxed{\alpha \le k}$;

(a_n) ha limite per $\boxed{\alpha < k}$;

(a_n) è convergente per $\boxed{\alpha < k}$.

A2 Si calcoli $\lim_{n\to+\infty} n\sqrt[3]{n^3+An+3} - n^2$. Usiamo il metodo "algebrico"(si potrebbe anche usare Taylor). Si ha

$$n\sqrt[3]{n^3+An+3} - n^2 = n\left(\sqrt[3]{n^3+An+3} - n\right) =$$

$$n\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+An+3} - n\right)\left(\sqrt[3]{(n^3+An+3)^2} + n\sqrt[3]{n^3+An+3} + n^2\right)}{\sqrt[3]{(n^3+An+3)^2} + n\sqrt[3]{n^3+An+3} + n^2} =$$

$$n\frac{n^3+An+3-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+An+3)^2} + n\sqrt[3]{n^3+An+3} + n^2} = \frac{An^2+3n}{\sqrt[3]{(n^3+An+3)^2} + n\sqrt[3]{n^3+An+3} + n^2} \to \boxed{\frac{A}{3}}$$

A3 Si dica per quali valori del parametro reale α la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^3}{n^4+3+(A\alpha)^n}$ risulta convergente. Indichiamo con $a_n := \dfrac{n^3}{n^4+3+(A\alpha)^n}$. Ricordiamo che $(A\alpha)^n \to 0$ se $|A\alpha| < 1 \Leftrightarrow -1/A < \alpha < 1/A$. Per questi valori di α risulta $na_n = \dfrac{n^4}{n^4+3+(A\alpha)^n} \to 1$ e quindi a_n è asintotica a $1/n$ per cui la serie associata è divergente (per questo bisogna osservare che $a_n \ge 0$). Se $|A\alpha| = 1$ si ha lo stesso risultato perchè si ha ancora $na_n \to 1$ (per avere questo basta che $(A\alpha)^n$ sia limitato, dato che in tal caso il termine n^4 "prende il sopravvento"). Nel caso $|A\alpha| > 1$ applichiamo il criterio della radice a $|a_n|$. Si ha $\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{|A\alpha|}\dfrac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{n^4|A\alpha|^{-n} + 3|A\alpha|^{-n} + 1}} \to \dfrac{1}{|A\alpha|}$. Dato che stiamo considerando $\dfrac{1}{|A\alpha|} < 1$, ne segue che in questo caso la serie converge assolutamente e dunque converge. In definitiva la serie converge se e solo se $\boxed{-1/A > \alpha \text{ o } \alpha > 1/A}$.

B1 Si indichino i valori del parametro reale α per cui l'equazione

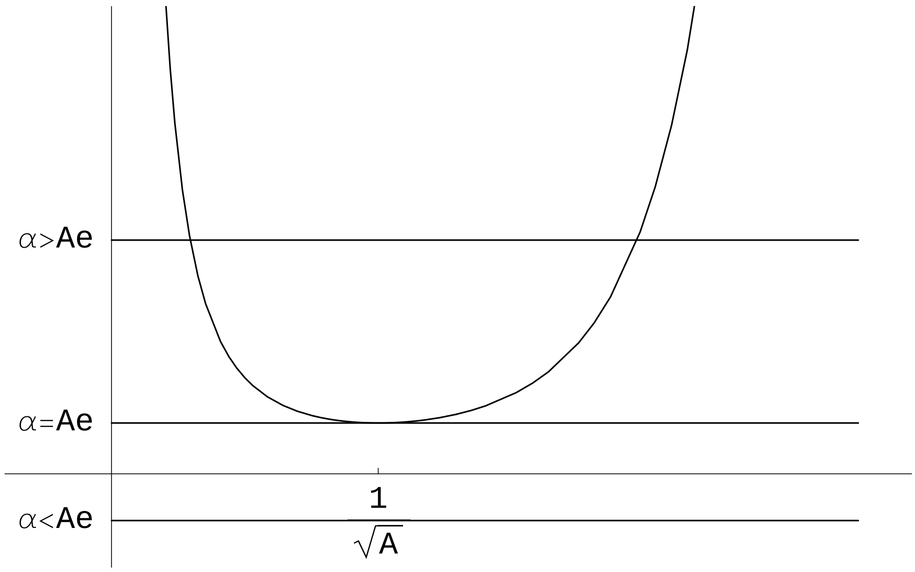
$$e^{Ax^2} = \alpha x^2$$

ha due soluzioni $x > 0$. Poniamo $f(x) := \dfrac{e^{Ax^2}}{x^2} = x^{-2}e^{Ax^2}$ e studiamo g sulle $x > 0$ (in ogni caso g è pari e quindi il grafico è simmetrico). Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$g'(x) = -2x^{-3}e^{Ax^2} + x^{-2}2Axe^{Ax^2} = 2x^{-3}e^{Ax^2}(-1 + Ax^2)$$

quindi g decresce in $]0, \sqrt{1/A}]$, mentre cresce su $[\sqrt{1/A}, +\infty[$ e dunque ha un minimo per $x = \sqrt{1/A}$ il cui valore è pari a $g(\sqrt{1/A}) = Ae$. Quindi, come mostra la figura, $g(x) = \alpha$ ha due soluzioni $x > 0$ se e solo se $\boxed{\alpha > Ae}$.



B2 Si calcoli il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos(x^3)\ln(1+A^2x^2)} - 3 + 2\cos(Ax)}{x^4}.$$

Si ha:

$$e^{\cos(x^3)\ln(1+A^2x^2)} - 3 + 2\cos(Ax) =$$

$$e^{(1+O(x^6))(A^2x^2 - \frac{A^4x^4}{2} + o(x^4))} - 3 + 2(1 - \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^4x^4}{24}x^4 + o(x^4)) =$$

$$e^{(A^2x^2 - \frac{A^4x^4}{2} + o(x^4) + O(x^6)O(x^2)} - 1 - A^2x^2 + \frac{A^4x^4}{12}x^4 + o(x^4) =$$

$$1 + A^2x^2 - \frac{A^4x^4}{2} + o(x^4) + \frac{1}{2}(A^2x^2 + o(x^3))^2 + o(O(x^2)^2) - 1 - A^2x^2 + \frac{A^4x^4}{12}x^4 + o(x^4) =$$

$$-\frac{1}{2}A^4x^4 + \frac{1}{2}A^4x^4 + \frac{A^4x^4}{12}x^4 + o(x^4) = \frac{A^4x^4}{12}x^4 + o(x^4)$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln(1+A^2x^2)}-3+2\cos(Ax)}{x^4}=\boxed{\frac{A^4}{12}}.$$

C1 È dato il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+A)\sqrt{x^2+2Ax+A^2+1}}\,dx$$

Usiamo la sostituzione $y=\sqrt{x^2+2Ax+A^2+1}=\sqrt{(x+A)^2+1}$. Si ha, per $x>0$

$y=\sqrt{(x+A)^2+1}\Leftrightarrow y^2=(x+A)^2+1\Leftrightarrow (x+A)=\sqrt{y^2-1}\Leftrightarrow x=\sqrt{y^2-1}-A$

da cui $dy=\dfrac{y}{\sqrt{y^2-1}}dy$ e quindi l'integrale diventa

$$\int_{\sqrt{A^2+1}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{y^2-1}\,y}\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}dy=\int_{\sqrt{A^2+1}}^{+\infty}\frac{1}{y^2-1}\,dy=$$

$$\lim_{c\to+\infty}\left[\ln\left(\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}\right)\right]_{\sqrt{A^2+1}}^{c}=\underbrace{\lim_{c\to+\infty}\ln\left(\sqrt{\frac{c-1}{c+1}}\right)}_{=0}-\ln\left(\sqrt{\frac{\sqrt{A^2+1}-1}{\sqrt{A^2+1}+1}}\right)=$$

$$\boxed{\ln\left(\sqrt{\frac{\sqrt{A^2+1}+1}{\sqrt{A^2+1}-1}}\right)}=\ln\left(\sqrt{\frac{(\sqrt{A^2+1}+1)^2}{A^2}}\right)=\boxed{\ln\left(\frac{\sqrt{A^2+1}+1}{A}\right)}$$

C2 Si consideri l'equazione differenziale

$$y'+\frac{1}{x\ln(x)}y=Ax\quad,\quad y(e)=y_0\qquad x>1$$

(a) Si tratta di un'equazione lineare $y'+ay=b$, dove $a(x)=\dfrac{1}{x\ln(x)}$ e $b(x)=Ax$. Applicando la formula si ha

$$A(x)=\int_e^x\frac{1}{t\ln(t)}\,dt=[\ln(\ln(t))]_e^x=\ln(\ln(x))$$

e quindi

$$y(x)=e^{-A(x)}\left(y_0+\int_e^x e^{A(t)}b(t)\,dt\right)=\frac{1}{\ln(x)}\left(y_0+\int_e^x\ln(t)At\,dt\right)=$$

$$\frac{1}{\ln(x)}\left(y_0+\left[\frac{At^2}{2}\ln(t)-\frac{At^2}{4}\right]_e^x\right)=\boxed{\frac{1}{\ln(x)}\left(C+\frac{Ax^2}{4}(2\ln(x)-1)\right)}$$

dove $\boxed{C = y_0 - \dfrac{Ae^2}{4}}$.

(b) Si ha

$$\lim_{x\to 1^+} y(x) = \boxed{\begin{cases} +\infty & \text{se } C > \frac{A}{4} \Leftrightarrow y_0 > \frac{A}{4}(e^2+1) \\ 0 & \text{se } C = \frac{A}{4} \Leftrightarrow = \frac{A}{4}(e^2+1) \\ -\infty & \text{se } C < \frac{A}{4} \Leftrightarrow < \frac{A}{4}(e^2+1) \end{cases}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = \boxed{+\infty}$$

(nel primo limite si puó usare Hospital, nel caso $C = \frac{A}{4}$).

(c)Per tracciare i grafici di y conviene introdurre $F(x,y) := -\dfrac{1}{x\ln(x)}y + Ax$, in modo che l'equazione si scrive come $y' = F(x,y)$, e studiare il segno di F. Si vede facilmente che, se $x > 1$

$$F(x,y) = 0 \ (F(x,y) > 0) \Leftrightarrow y = Ax^2\ln(x) \ (y < Ax^2\ln(x))$$

Poniamo $g(x) := Ax^2\ln(x)$ e studiamo g per $x > 1$. Si ha:

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty,$$

$$g'(x) = \frac{A}{2}x\ln(x) + Ax^2\frac{1}{x} = \frac{Ax}{2}(\ln(x)+2) \qquad g'(x) > 0 \quad \forall x \geq 1$$

Dal comportamento di g si deducono i comportamenti delle soluzioni, come nella figura, tenendo presente che nei punti del piano sopra (sotto) il grafico della g le y sono decrescenti (crescenti) e ricordando i limiti trovati prima. La linea tratteggiata indica il grafico di g. Le curve si possono classificare a seconda del loro limite a 1.