MATEMATICA - Ingegneria Gestionale - Compito del 21 giugno -SOLUZIONI-

A1 Dato α in $\mathbf{R}$ si consideri (a_n) definita da $a_n := \dfrac{n^\alpha + (-1)^n n^k}{2+n^k}$. Allora

(a_n) è limitata per: $\boxed{\alpha \leq k}$;

(a_n) ha limite per: $\boxed{\alpha > k}$;

(a_n) è convergente per: $\boxed{\text{nessun } \alpha}$.

Infatti si può scrivere $a_n = b_n + (-1)^n c_n$, dove $b_n = \dfrac{n^\alpha}{2+n^k}$ e $c_n = \dfrac{n^k}{2+n^k}$. Allora si vede subito che $c_n \to 1$ e quindi $((-1)^n c_n)$ é limitata ma non ha limite ($c_{2n} \to 1$ mentre $c_{2n+1} \to -1$). Invece $b_n \to 0$, se $\alpha < k$, $b_n \to 1$, se $\alpha = k$ e $b_n \to +\infty$, se $\alpha > k$. Passando alla somma si deduce che (a_n) è limitata ma non ha limite se $\alpha \leq k$ e $a_n \to +\infty$ se $\alpha > k$ (ricordiamo che una successione si dice convergente se ammette limite finito).

A2 Si calcoli $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+A}{n+B}\right)^n$. Si ha

$$\left(\frac{n+A}{n+B}\right)^n = \left(1+\frac{A-B}{n+B}\right)^n = \left(\left(1+\frac{A-B}{n+B}\right)^{\frac{n+B}{A-B}}\right)^{A-B}\left(1+\frac{A-B}{n+B}\right)^{-B} \to \boxed{e^{A-B}.}$$

Si è usato il fatto che, se $|a_n| \to +\infty \Rightarrow (1+1/a_n)^{a_n} \to e$; qui $a_n = \dfrac{n+B}{A-B}$.

A3 Si dica per quali valori del parametro reale α la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^3+\alpha n+2}{n^3+An+1}\right)^n - 1$ risulta convergente. Se $a_n := \left(\dfrac{n^3+\alpha n+2}{n^3+An+1}\right)^n - 1$ allora

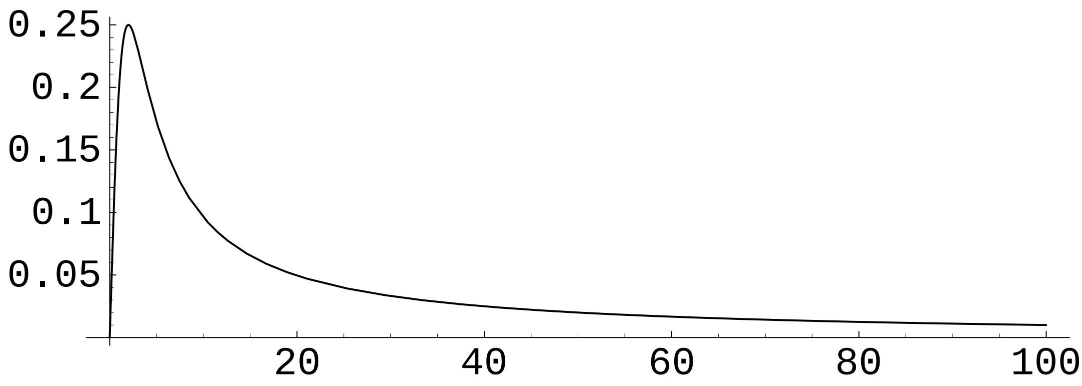
$$a_n = e^{n\ln\left(\frac{n^3+\alpha n+2}{n^3+An+1}\right)} - 1 = e^{n\ln\left(1+\frac{(\alpha-A)n+1}{n^3+An+1}\right)} - 1 = e^{n\ln\left(1+\frac{(\alpha-A)}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} - 1 = \frac{(\alpha-A)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ne segue che, se $(\alpha - A) \neq 0$ la successione (a_n) è asintotica a $((\alpha - A)/n)$, che è termine di una serie armonica DIVERGENTE; se invece $(\alpha - A) = 0$ allora (a_n) è asintotica a (c/n^2), per c opportuno, e in questo caso la relativa serie è CONVERGENTE. In definitiva la serie assegnata converge solo se $\boxed{\alpha = A}$.

B1 È data f definita da $f(x) := \dfrac{x}{A^2+x^2}$. Allora $f(0) = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e calcolando la derivata si ottiene $f'(x) = \dfrac{A^2-x^2}{(A^2+x^2)^2}$. Quindi f' si annulla solo in $x = A$ (per quanto riguarda le $x \geq 0$, che sono quelle che ci interessano). Inoltre è evidente che $f'(x) > 0$, per $0 \leq x < A$ mentre $f'(x) < 0$ per $x > A$. Tutto questo implica che A è un punto di massimo e che in 0 f ha minimo. Quindi

$$\inf_{x\geq 0} f(x) = \boxed{0}\ \boxed{\text{è il min.}} \quad , \quad \sup_{x\geq 0} f(x) = f(A) = \boxed{\tfrac{1}{2A}},\ \boxed{\text{è il max.}}$$

La figura (fatta nel caso $A = 2$) mostra il grafico di f.



B2 Si calcoli il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x^2}-1}{\ln\left(\sin(Ax)+\cos(Bx)\right) - A\tan(x)}.$$

Si ha:

$$\sqrt{1-2x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$$

$$\sin(Ax)+\cos(Bx) = Ax + o(x^2) + 1 - \frac{(Bx)^2}{2} + o(x^2) = 1 + Ax - \frac{B^2x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\ln\left(\sin(Ax)+\cos(Bx)\right) = \ln\left(1 + Ax - \frac{B^2x^2}{2} + o(x^2)\right) =$$

$$Ax - \frac{B^2x^2}{2} + o(x^2) - \frac{1}{2}(Ax+o(x))^2 + o((Ax+o(x))^2) =$$

$$Ax - \frac{(B^2+A^2)x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\tan(x) = x + o(x^2) \Rightarrow A\tan(x) = Ax + o(x^2)$$

e dunque

$$\frac{\sqrt{1-2x^2}-1}{\ln\left(\sin(Ax)+\cos(Bx)\right) - A\tan(x)} = \frac{-x^2+o(x^2)}{-\frac{(B^2+A^2)x^2}{2} + o(x^2)} \to \boxed{\frac{2}{A^2+B^2}}$$

C1 Si calcoli l'integrale improprio $\int_0^A \frac{x^2}{\sqrt{A^2-x^2}}\,dx$. Notiamo che $\frac{x}{\sqrt{A^2-x^2}}$ è una primitiva di $-\sqrt{A^2-x^2}$: questo si vede direttamente o con la sostituzione $y = x^2$ in $\int \frac{x}{\sqrt{A^2-x^2}}\,dx$. Allora integrando per parti

$$\int_0^A \frac{x^2}{\sqrt{A^2-x^2}}\,dx = \int_0^A x\frac{x}{\sqrt{A^2-x^2}}\,dx = \Big[-x\sqrt{A^2-x^2}\Big]_0^A + \int_0^A \sqrt{A^2-x^2}\,dx =$$

$$0 + A\int_0^A \sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}\,dx = A^2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \boxed{\frac{A^2\pi}{4}}$$

(l' ultimo integrale è stato incontrato più volte a lezione - si può fare ponendo $t = \sin(\theta)$; è chiaro peraltro che tale integrale rappresenta un quarto dell'area del cerchio unitario - per convincersene basta guardare il grafico di $\sqrt{1-t^2}$).

C2 è data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{4}{x}y - A + \frac{1}{x} \quad , \quad y(1) = y_0 \qquad x > 0$$

(a) Applicando la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine si trova:

$$y(x) = x^4\left(y_0 + \int_1^x \left(-A + \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^4}\,dt\right) = x^4\left(c + \frac{A}{3x^3} - \frac{1}{4x^4}\right) = cx^4 + \frac{A}{3}x - \frac{1}{4}$$

dove $c = y_0 - \dfrac{4A-3}{12}$;

(b) dalla formula trovata si vede subito che:

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = -\frac{1}{4}^+ \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c \geq 0 \Leftrightarrow y_0 \geq \dfrac{4A-3}{12} \\ -\infty & \text{se } c < 0 \Leftrightarrow y_0 < \dfrac{4A-3}{12} \end{cases}$$

(c) per tracciare i grafici delle soluzioni y al variare di y_0 conviene introdurre $F(x,y) := \dfrac{4}{x}y - A + \dfrac{1}{x}$, in modo che l'equazione si scrive $y' = F(x,y)$ e stu/-dia/-re il segno di F. Si vede facilmente che (restando nelle $x > 0$) $F(x,y) = 0$ se e solo se $y = g(x)$, dove $g(x) := \dfrac{1}{4}(Ax-1)$, e $F(x,y) > 0 (< 0) \Leftrightarrow y > g(x) (< g(x))$. Utilizzando il grafico di g (che è una retta), il fatto che la $y(x)$ deve crescere (decrescere) dove $F(x,y) > 0$ (< 0) e i limiti trovati al punto (b), si trovano i grafici rappresentati in figura (la retta più alta è la soluzione nel caso $c = 0$, quella più bassa è il grafico di g; è stato rappresentato il caso $A = 3$).