Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 10 gennaio 2006

1. Per ognuna delle seguenti serie si indichi se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non converge ($\boxed{\text{NC}}$) (4p.).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \cos(n\pi) \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1} \sin(n) \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio, se esiste (4p.):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^4+2x^2+2}\, dx = \underline{\hspace{4cm}} / \boxed{\text{non esiste}}$$

3. Data $f(x) := x + \mathrm{tg}(3x) + 1$, calcolare (se esiste) (3p.):

$$(f^{-1})'(1) = \underline{\hspace{4cm}} / \boxed{\text{non esiste}}$$

4. Data $f(x,y) := x^4 + y^4 - xy$ si trovi (5p.):

$$\min_{\mathbf{R}^2} f = \underline{\hspace{4cm}} / \boxed{\text{non esiste}}$$

DA SVOLGERE SUL FOGLIO

1. Si calcoli il seguente limite (7p.): $\lim_{x\to 0} \left(\cos(x) e^{\frac{x^2}{2}}\right)^{\frac{1}{x^4}}$.

2. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{2x} y + x - 4, \qquad x > 0.$$

   (a) Dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0, +\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);

   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (4p.);

   (c) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è crescente su $]0, +\infty[$ (3p.);

   (d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è decrescente su $]0, 2$ (3p.).

Soluzioni

1. • La prima serie è a termini positivi. Dato che

$$a_n := \frac{n}{n^2+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)(1+o(1)) = frac1n^2(1+o(1))$$

e che la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, alllora la serie in esame é $\boxed{\text{assolutamente convergente}}$.

• La seconda serie è a segni alterni dato che $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Dunque la serie si può scrivere come $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ dove $a_n = \dfrac{n}{1+n^2}$. Tale serie $\boxed{\text{convergente, non assolutamente}}$.
Infatti a_n è decrescente in n e quindi si può applicare Leibniz. Però

$$a_n = \frac{1}{n}(1+o(1))$$

e $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$ (quindi la convergenza non é assoluta).

• La terza serie ha termini dal segno variabile (il segno di $\sin(n)$ è altamente irregolare). Però, posto $a_n := \dfrac{n^2}{n^4+1}\sin(n)$ si ha

$$|a_n| \leq \frac{n^2}{n^4+1} = \frac{1}{n^2}(1+o(1))$$

e $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Dunque la serie $\boxed{\text{converge assolutamente}}$.

• L'ultima serie è ancora a termini positivi e notiamo che $\cos(1/n) \to 1$, per cui

$$\frac{n}{n^2+1}\cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n^2+1}(1+o(1)) = \frac{1}{n}(1+o(1)).$$

Dato che $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$ la serie $\boxed{\text{non converge}}$.

2. Si vede facilmente che, essendo la funzione dispari, si ha che l'integrale vale $\boxed{0}$

3. Se usiamo la sostituzione $y = x^2$ si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^4+2x^2+2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^2+2y+2}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(y+1)^2+1}\,dy =$$
$$[\mathrm{arctg}(y+1)]_{-\infty}^{+\infty} = \boxed{\pi}$$

4. Se $f(x) = x + \mathrm{tg}(3x) + 1$, allora $f(0) = 1$ e quindi $f^{-1}(1) = 0$. Inoltre $f'(x) = 1 + 3\dfrac{1}{1+9x^2}$ e dunque $f'(0) = 1 + 3 = 4$. Se ne deduce

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

5. Se $f(x,y) = x^4 + y^4 - xy$ allora non è difficile vedere che $f(x,y) \to +\infty$ se $\|(x,y)\| \to +\infty$, e dunque il minimo deve esistere. Per trovarlo cerchiamo i punti stazionari. Si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 4x^3 - y, \qquad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = 4y^3 - x$$

da cui si deduce che

$$\nabla f(x,y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=4x^3 \\ x=4y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4x^3 \\ x=4^4x^9 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(0,0) \text{ oppure } \begin{cases} y=4x^3 \\ 1=(4x^2)^4 \end{cases}$$

La seconda condizione equivale a

$$\begin{cases} y=4x^3 \\ 1=4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4x^3 \\ x=\pm\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=\pm\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Quindi i punti critici sono $(0,0)$ e $\pm(1/2,1/2)$. Allora $f(0,0)=0$ mentre

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}=f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

e dunque $\min f = \boxed{-\frac{1}{8}}$.

1. Si ha:

$$\ln(\cos(x))=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)=$$
$$-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2+o((O(x^2))^2)=$$
$$-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$$

Allora

$$\frac{\ln\left(\cos(x)e^{\frac{x^2}{2}}\right)}{x^4}=\frac{\ln(\cos(x))+\frac{x^2}{2}}{x^4}=\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4}\to-\frac{1}{12}$$

e quindi

$$\left(\cos(x)e^{\frac{x^2}{2}}\right)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\frac{\ln\left(\cos(x)e^{\frac{x^2}{2}}\right)}{x^4}}\to\boxed{e^{-\frac{1}{12}}}$$

2. (a) Dalla formula risolutiva si ha:

$$y(x)=\sqrt{x}\left(y(1)+\int_1^x\frac{t-4}{\sqrt{t}}\,dt\right)=\sqrt{x}\left(C+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-8\sqrt{x}\right)=C\sqrt{x}+\frac{2}{3}x^2-8x$$

dove $C=y_0+8-\frac{2}{3}=y_0+\frac{22}{3}$.

(b) Dal calcolo precedente si deduce che, indipendentemente da C, cioè da y_0,

$$\lim_{x\to0^+}y(x)=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}y(x)=+\infty$$

Si può anche notare (servirà dopo) che

$$\lim_{x\to0^+}y(x)=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\left(C+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-8\sqrt{x}\right)=\begin{cases}0^+ & \text{se } C>0\\ 0^- & \text{se } C\le 0\end{cases}$$

(nel caso $C=0$ si metta in evidenza x).
Notiamo che il valore $C=0$ corrisponde a $y_0=-\frac{22}{3}$

(c) Conviene ora farsi un'idea del grafico delle y. Per questo poniamo $F(x,y) := \frac{y}{2x}+x-4$ di modo che l'equazione si può esprimere come $y' = F(x,y)$. Individuiamo nel piano cartesiano le coppie (x,y) tali che $x>0$ e $F(x,y)>0$. Queste condizioni equivalgono a $x>0$ e $y>2x(4-x)$. Se chiamiamo $g(x) := 2x(4-x)$, allora, nelle $x>0$,

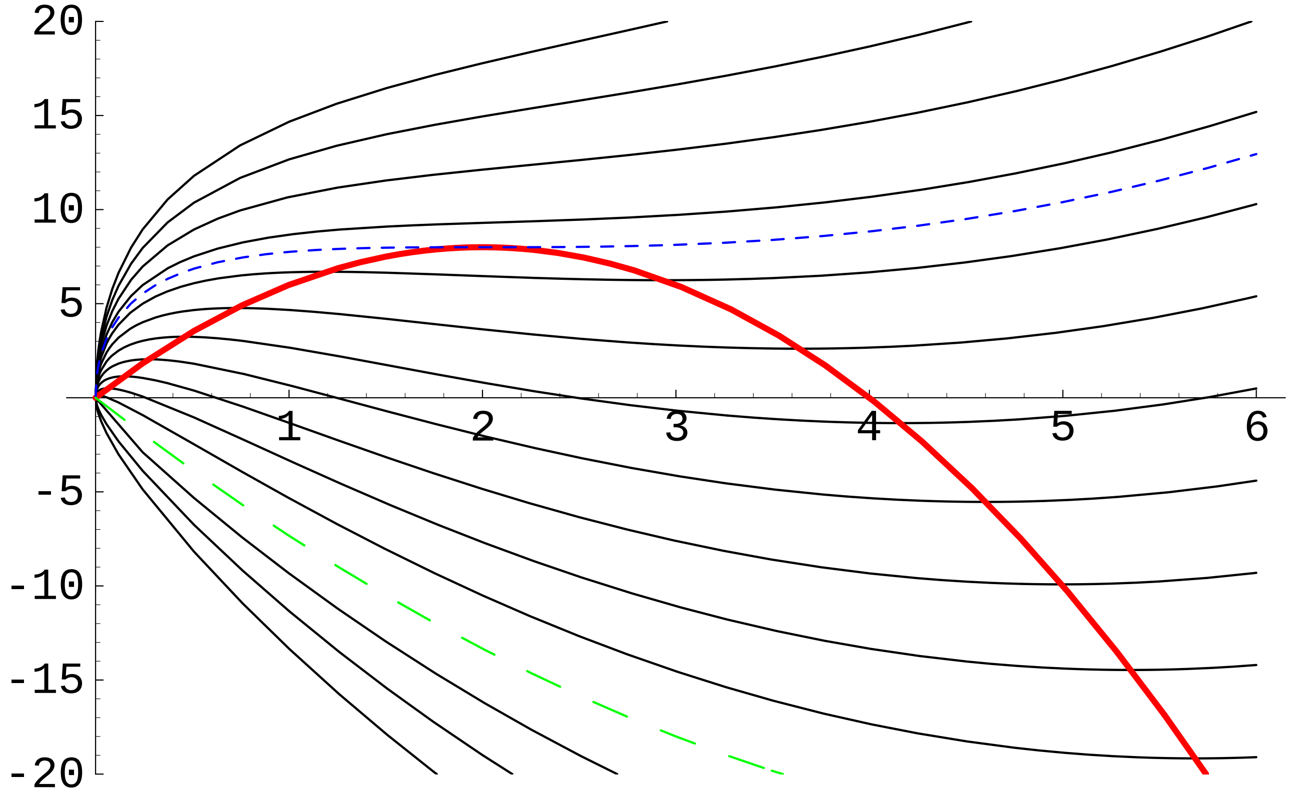
$$F(x,y)>0 \Leftrightarrow y>g(x), \qquad F(x,y)<0 \Leftrightarrow y<g(x), \qquad F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=g(x).$$

Notiamo che il grafico di g è una parabola con la concavità verso il basso, passante per $(0,0)$ e $(0,4)$ con vertice in $(2,8)$ e che le informazioni raccolte ci dicono che ogni soluzione y deve essere crescente quando sta sopra la parabola (cioè nelle x in cui $y(x)>g(x)$), deve essere decrescente quando sta sotto la parabola (cioè nelle x in cui $y(x)<g(x)$) e deve avere derivata nulla quando attraversa la parabola ($y(x)=g(x)$). Mettendo insieme questi fatti e i limiti trovati si perviene ai grafici indicati in figura (la curva rossa contratto spesso è la parabola).
In particolare la soluzione $\bar{y}$ con $\bar{y}(2)=8$ è quella che passa tangente alla parabola nel vertice ed è sempre crescente (curva blu con tratteggio fitto). Tale $\bar{y}$ si ottiene imponendo

$$8 = y(2) = C\sqrt{2} + \frac{8}{3} - 16 \Leftrightarrow C = \frac{64}{3\sqrt{2}}(=: \bar{C}) \Leftrightarrow y_0 = \bar{C} - \frac{22}{3} = \frac{64-22\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}(=: \bar{y}_0)$$

Per $-\frac{22}{3}y_0 < \bar{y}_0$ le curve sono sotto $\bar{y}$ e necessariamente crescono in un intervallino a destra di zero (dovendo essere $y(t) \to 0^+$ per $t \to 0^+$) incrociano la curva g, decrescono per un altro intervallo fino a che non intersecano di nuovo g (lo devono fare poichè $y(t) \to +\infty$ se $t \to +\infty$) e da questo punto crescono sempre e vanno all'infinito. Se $y_0 \le -\frac{22}{3}$ le curve sono decrescenti vicino a zero fino a quando non attraversano la g (in una x maggiore di 4) e poi vanno crescendo all'infinito (la curva con $y_0 = -\frac{22}{3}$ è indicata dal colore verde, tratteggio rado). Se invece $y_0 > \bar{y}_0$ le soluzioni stanno sempre sopra $\bar{y}$ e quindi sopra g; dunque sono sempre crescenti.
In definitiva la risposta alla domanda (c) è per $\boxed{y_0 \ge \bar{y}_0 = \frac{64-22\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}}$.

(d) Per i motivi esposti nel punto precedente le y decrescenti su $[0,2]$ sono quelle con $\boxed{y_0 \le -\frac{22}{3}}$.



20
15
10
5
-5
-10
-15
-20
1
2
3
4
5
6