Analisi di Fourier e alcune equazioni della fisica matematica [1]

SECONDA LEZIONE

Convergenza puntuale e uniforme per successioni di funzioni

[1]prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Successioni di funzioni

Definizione

Una successione di funzioni $\{f_n\}$ *da* A *in* $\mathbb{R}$ *è un'applicazione che a ogni intero* n *associa una funzione* $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$. *Qui* A *è un sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *assegnato.*
Sono coinvolte due variabili: l'indice n *che individua l'ennesima funzione della successione e la* x *che indica la variabile indipendente di* f_n.
Stiamo dunque considerando una funzione di due variabili $(n,x) \longmapsto f_n(x)$, *ma conviene mantenere l'idea per cui a ogni* n *corrisponde una funzione* f_n.

Definizione (Convergenza puntuale)

Diciamo che una successione $\{f_n\}$ *di funzioni converge puntualmente su* A *a una funzione* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *se*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \textit{per ogni } x \textit{ di } A$$

Scriveremo anche $f_n \xrightarrow{punt.} f$

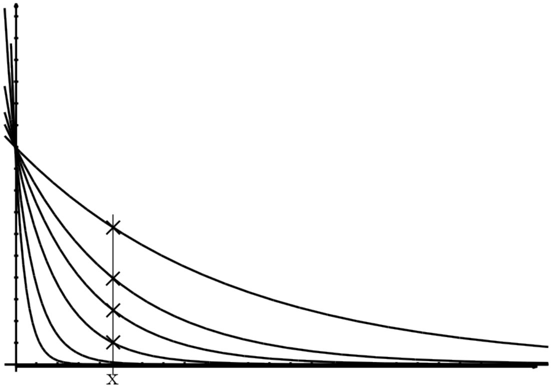
La definizione di convergenza puntuale “sembra naturale” – vediamo qualche esempio.

Esempio

Prendiamo $f_n(x) := e^{-nx}$. *Si ha;*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & se\ x > 0, \\ 1 & se\ x = 0. \\ +\infty & se\ x < 0 \end{cases}$$

VEDI FIGURA *Per evitare l'infinito consideriamo* $A = [0, +\infty[$. *Notiamo che, mentre tutte le* f_n *sono continue, il limite puntuale* f *NON È CONTINUO dato che* $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ *se* $x > 0$.



$$f_n(x) = e^{-nx}$$

Definizione

Date la successione di funzioni $\{f_n\}$ *e una funzione* f, $(f_n, f : A \to \mathbb{R})$ *diciamo che* f_n *converge uniformemente su* A *a* f *se si ha:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, \forall x \in A \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

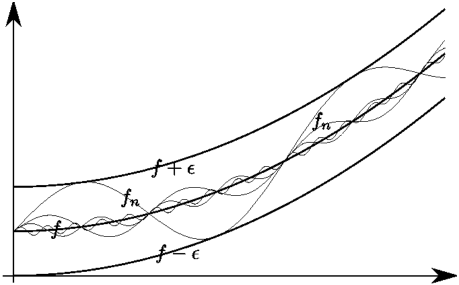
Per esprimere quanto sopra scriveremo $f_n \xrightarrow{unif.} f$ *(su* A*).*

Se scrivessimo la definizione di $f_n \xrightarrow{punt.} f$ avremmo:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in A\ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

L'unica differenza è la posizione di "$\forall x \in A$" – questo corrisponde a dire che nella convergenza puntuale $\bar{n}$ dipende da ε e da x, mentre nella convergenza uniforme $\bar{n}$ **dipende solo da** ε ("in maniera uniforme" rispetto a x).

Un modo di visualizzare la convergenza uniforme di f_n a f è di dire che per ogni $\varepsilon > 0$ il grafico di f_n è definitivamente compreso tra il grafico di $f - \varepsilon$ e quello di $f + \varepsilon$.



Definizione (Norma di una funzione)

Introduciamo la ***norma uniforme*** *di una funzione f su un insieme A mediante*

$$\|f\|_{\infty,A} := \sup_{x\in A} |f(x)|$$

Notiamo che se A è un intervallo limitato e chiuso, possiamo scrivere "max" *in luogo di* "sup"*; se non siamo in questo caso la norma può anche assumere valore infinito.*
Se l'insieme A è chiaro dal contesto scriviamo semplicemente $\|f\|_\infty$

Osservazione

Si ha:

$$f_n \xrightarrow{unif.} f \Leftrightarrow \|f_n - f\|_{\infty,A} \to 0$$

(e quindi in caso di convergenza uniforme $\|f_n - f\|_{\infty,A}$ è finita).

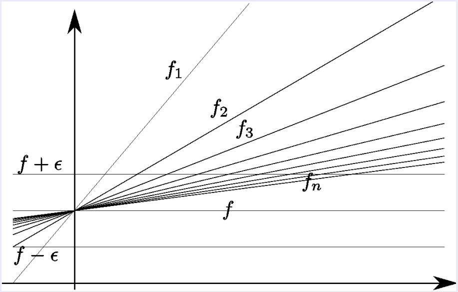
Esempio

La successione di funzioni $\{f_n\}$ *da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$ *definita da*

$$f_n(x) := 1 + \frac{x}{n}$$

converge puntualmente a uno, ma non converge uniformemente a uno su $\mathbb{R}$

Peraltro, fissato $a \in \mathbb{R}$ *arbitrario* $f_n \xrightarrow{unif.} f$ *su* $[-a, a]$.



VERIFICA

Proprietà della convergenza uniforme

La convergenza uniforme ha proprietà assai migliori rispetto alla convergenza puntuale.

Teorema

Supponiamo che $f_n \xrightarrow{unif.} f$ *su* A. *Allora*

- $f_n \xrightarrow{punt.} f$ *su* A;
- *se le* f_n *sono continue su* A, *allora* f *è continua su* A;
- *se* $A = [a,b]$ *(intervallo limitato) e se le* f_n *sono integrabili su* $[a,b]$, *allora* f *è integrabile su* $[a,b]$ *e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Osservazione

La prima proprietà scritta sopra ci dice che la convergenza puntuale "individua" il limite uniforme (se quest'ultimo esiste).

Osservazione

Il secondo punto del teorema precedente è un risultato di "scambio di limiti":

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{=f(x)}$$

Il terzo è invece un risultato di "scambio tra limite e integrale":

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{=f(x)}\right) dx$$

ATTENZIONE: lo scambio limite/integrale non vale se l'intervallo è illimitato.