Analisi di Fourier e alcune equazioni della fisica matematica [1]

QUARTA LEZIONE

Risoluzione di equzioni differenziali lineari mediante le serie di potenze.

Le funzioni di Bessel.

---

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Risoluzione per serie di equazioni differenziali lineari

Teorema

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f \\ y(0) = A, y'(0) = B \end{cases} \tag{P}$$

con a, b, c *ed* f *funzioni di* x *sviluppabili in serie di potenze in un intervallo simmetrico centrato in zero:*

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n, \quad per\ |x| < R$$

e supponiamo che $a(x) \neq 0$ *per* $|x| < R$.
Allora la soluzione y *è sviluppabile in potenze nell'intervallo* $]-R, R[$.

Il teorema precedente è semplice da capire nel caso in cui a,b e c sono costanti. In questo caso in effetti se ipotizziamo che

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n,$$

allora applicando i teoremi sulla derivazione per serie:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n y_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) y_{n+1} x^n;$$
$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) y_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) y_{n+2} x^n.$$

Imponendo che valga l'equazione

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a(n+2)(n+1)y_{n+2} + b(n+1)y_{n+1} + cy_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

Applicando il principio di identità si trova la relazione ricorsiva:

$$\begin{cases} a(n+2)(n+1)y_{n+2} + b(n+1)y_{n+1} + cy_n = f_n \\ y_0 = A, \quad y_1 = B \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} y_{n+2} = \dfrac{f_n - b(n+1)y_{n+1} - cy_n}{a(n+2)(n+1)} \\ y_0 = A, \quad y_1 = B \end{cases}$$

che permette di ricavare y_n per ogni n.

Per concludere il teorema (in questo caso) bisognerebbe dimostrare che gli y_n così trovati danno luogo a un raggio di convergenza finito (pari almeno a quello della funzione f) e quindi effettivamente la y esiste – automaticamente essa sarà soluzione di (P) per le proprietà degli y_n.

Equazione di Bessel

Dato $N \geq 0$ intero consideriamo la seguente equazione

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - N^2)y = 0 \tag{B}$$

Si tratta di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine i cui coefficienti dipendono da x. L'equazione NON è in forma normale e non possiamo mettercela, almeno se vogliamo risolverla per x vicino a zero. In effetti vedremo che non vale il teorema di esistenza per il problema di Cauchy con punto iniziale zero.
Possiamo comunque cercare di risolvere (B) per serie, cercando la soluzione come serie di potenze:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n \qquad \text{da cui, come prima}$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n y_n x^{n-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) y_n x^{n-2}.$$

che messi nell'equazione danno

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)y_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n y_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} N^2 y_n x^n = 0$$

Riscalando gli indici nella terza serie e estraendo $n=0$ e $n=1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left((n-1)ny_n + ny_n + y_{n-2} - N^2 y_n\right) x^{n+2} + y_1 x - (y_1 x + y_0)N^2 = 0$$

che si può scrivere

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left((n^2 - N^2)y_n + y_{n-2}\right) x^n + y_1(1-N^2)x - y_0 N^2 = 0$$

da cui, per il principio di identità, si ottiene la formula ricorsiva:

$$\begin{cases} (N^2 - n^2)y_n = y_{n-2} & \text{per } n \geq 2 \\ y_1(1-N^2) = 0 \\ y_0 N^2 = 0 \end{cases} \qquad (B_{ric})$$

La prima relazione nella formula (B_{ric}) permette di ricavare a_n da a_{n-2} **a patto che** $N^2 - n^2 \neq 0$, cioè $n \neq N$.

Inoltre (B_{ric}) mostra che si possono ricavare indipendentemente i termini pari e i termini dispari: da y_0 si ricava y_2, da y_2 si ricava y_4 e così via (analogamente da y_1 si ricava y_3, da y_3 si ricava $y_5 \ldots$).

Ragionando in questo modo si ottiene che tutti gli y_n sono nulli se $n < N$ mentre y_N **si può assegnare ad arbitrio**.
Inoltre, se N è pari tutti gli y_n con n dispari sono nulli, in quanto $y_1 = 0$ e saltando di due in due non si incontra mai l'indice N. y_N si può assegnare ad arbitrio
Analogamente se N è dispari tutti gli y_n con n pari sono nulli.

Invece, se si sceglie $y_N \neq 0$, allora tutti gli y_n con n avente la stessa parità di N sono diversi da zero.

Applicando il criterio del rapporto non è difficile vedere che la serie di potenze costruita a partire dagli y_n **è convergente su tutto** $\mathbb{R}$ e quindi, ragionando a rovescio, tale serie risolve l'equazione di partenza.

Notiamo che si può in effetti esplicitare i coefficienti y_n, dalla relazione

$$y_n = -\frac{y_{n-2}}{n^2 - N^2} = -\frac{y_{n-2}}{(n-N)(n+N)} \qquad n > N$$

Infatti, facendo qualche prova

$$y_{N+2} = -\frac{y_N}{2(2N+2)} = -\frac{y_N}{4(N+1)},$$

$$y_{N+4} = \frac{y_N}{4(N+1)} \frac{1}{4(2N+4)} = \frac{y_N}{4^2 \cdot 2(N+1)(N+2)}$$

$$y_{N+6} = -\frac{y_N}{4^2(N+1)(N+2)} \frac{1}{6(2N+6)} = -\frac{y_N}{4^3 \cdot 2 \cdot 3(N+1)(N+2)(N+3)}$$

che suggerisce la formula

$$y_{N+2k} = (-1)^k \frac{y_N}{4^k k!(N+1)(N+2)\cdots(N+k)} = (-1)^k \frac{N! y_N}{4^k k!(N+k)!}$$

Una volta intuita la formula non è difficile dimostrarla per induzione. Quindi

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{N! y_N}{4^k k!(N+k)!} x^{N+2k} = \left(\frac{x}{2}\right)^N \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{N! 2^N y_N}{k!(N+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Funzioni di Bessel di prima specie

Definizione

Per N intero poniamo

$$J_N(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(N+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

cioè la soluzione dell'equazione di Bessel con la condizione

$$y_N = \frac{1}{N!2^N} \Leftrightarrow Y^{(N)}(0) = \frac{1}{2^N}$$

J_N *si chiama la funzione di Bessel di prima specie di ordine* N.

- È chiaro che ogni soluzione dell'equazione di Bessel di ordine N (che sia regolare su tutto $\mathbb{R}$) è multipla di J_N.
- Se N è pari (risp. dispari) J_N è pari (risp. dispari).
- Se $N \geq 1$ $J_N(x) \simeq \dfrac{x^N}{n!2^N}$ per $x \to 0$.

Zeri delle funzioni di Bessel

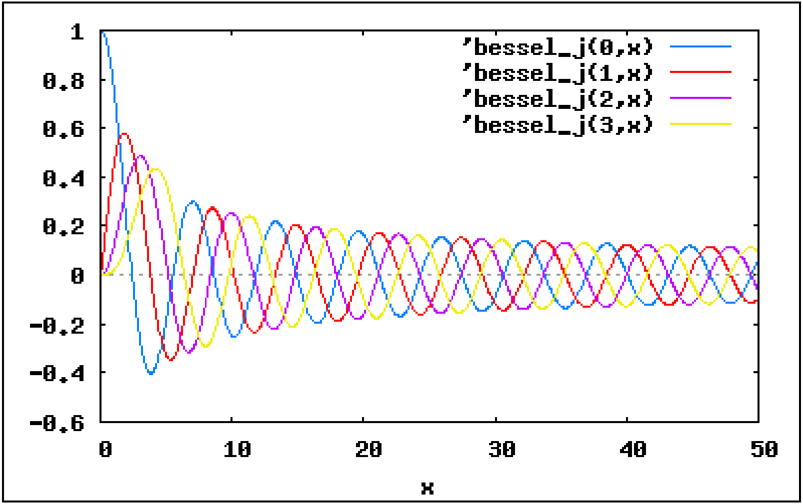
Proprietà

Sia $N \geq 0$.
Per $x \longrightarrow \infty$ *si ha (in senso che lasciamo nel vago e che non dimostriamo):*

$$J_N(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2N-1}{4}\pi\right)$$

Ne segue che la funzione J_N ***ha una successione di zeri*** $z_{N,k}$ *tali che, per* $k \longrightarrow \infty$*:*

$$z_{N,k} \simeq \left(\frac{2N+1}{4} + k\right)\pi$$



Funzioni di Bessel di ordine 0,1,2,3.

Osservazione

Dato che l'equazione di Bessel è del secondo ordine, le sue soluzioni su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *devono costituire una famiglia di funzioni dipendente da due parametri (a causa del teorema di Cauchy applicato a un qualunque punto iniziale* $x_0 \neq 0$*).*

Le funzione λJ_N, $\lambda \in \mathbb{R}$, *costituiscono una parte delle soluzioni (quelle* ***prolungabili su tutto*** $\mathbb{R}$*). La famiglia completa delle soluzioni è data da*

$$y = \lambda J_N + \mu Y_N$$

dove Y_M *è un'altra soluzione delle'equazione che però* ***è singolare*** *in* $x = 0$*.*

Tale Y_M*, che si potrebbe trovare mediante sviluppi in "serie di potenze negative" viene detta funzione di Bessel di seconda specie di ordine N*

Noi però ci occuperemo solo delle funzioni di Bessel di prima specie, che come vedremo sono legate ai *modi di vibrazione radiali* di una membrana circolare.

Un problema di "autovalori"

Sia N un intero e sia $R > 0$. Per ogni $k \geq 1$ intero poniamo

$$y_{N,k}(x) := J_N\left(\frac{z_{N,k}}{R}x\right)$$

($z_{N,k}$ è il k-esimo zero di J_N). Dalla definizione è evidente che $y_{N,k}(R) = 0$. Se poniamo

$$\mu_{N,k} := \frac{z_{N,k}}{R}$$

otteniamo

$$y_{N,k}(x) = J_N(\mu_{N,k}x), \quad y'_{N,k}(x) = \mu_{N,k}J'_N(\mu_{N,k}x), \quad y'_{N,k}(x) = \mu^2_{N,k}J''_N(\mu_{N,k}x),$$

e allora (sottintendiamo gli indici N e k e poniamo $t = \mu x$)

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (\mu^2x^2 - N^2)y(x) = t^2J''(t) + tJ'(t) + (t^2 - N^2)J(t) = 0$$

Un problema di "autovalori"

Dunque la coppia $y = y_k = y_{N,k}$ e $\lambda = \lambda_k = -\mu^2_{N,k})$ è soluzione del problema:

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{y'}{x} - N^2 \dfrac{y}{x^2} = \lambda y \quad \text{per } 0 \le x \le R \\ y \neq 0 \\ y(R) = 0 \end{cases} \tag{$B.\lambda$}$$

In analogia con l'algebra lineare si dice che $y_k = y_{N,k}$ è un'*autofunzione* per l'equazione $y'' + \dfrac{y'}{x} - N^2 y$ su $[0, R]$, con condizione zero in R, e che $\lambda_k - \mu^2_{N,k}$ è un *autovalore* per tale equazione.

Notiamo che tutti i multipli (non nulli) di y_k sono autofunzioni (col medesimo autovalore λ_k).

Ragionando all'indietro non è difficile verificare che le coppie sopra trovate sono **tutte e sole** le soluzioni del problema $(B.\lambda)$

Ortogonalità

Osservazione

L'equazione in $(B.\lambda)$ *si può scrivere (almeno su* $]0,R]$*)*

$$(xy'(x))' + \left(\lambda x - \frac{N^2}{x}\right) y(x) = 0$$

Teorema

Siano $N \geq 0$, $k,h \geq 1$, $k \neq h$ *degli interi. Allora*

$$\int_0^R x y_{N,k}(x) y_{N,h}(x)\, dx = 0$$

Ci si riferisce a tale proprietà dicendo che $y_{N,k}$ *e* $y_{N,h}$ *sono ortogonali rispetto al "prodotto scalare" (tra funzioni)*

$$u \cdot v := \int_0^R x u(x) v(x)\, dx$$

DIM