ANALISI 1 [1]

VENTOTTESIMA E VENTINOVESIMA LEZIONE

Equazioni differenziali - Teorema di esistena e unicità di Cauchy

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Teorema di esistenza e unicità di Cauchy

Teorema

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:

- *$F(x,y)$ è continua nelle due variabili;*
- *$F(x,y)$ è lipschitziana rispetto a y (uniformemente rispetto a x), cioè*

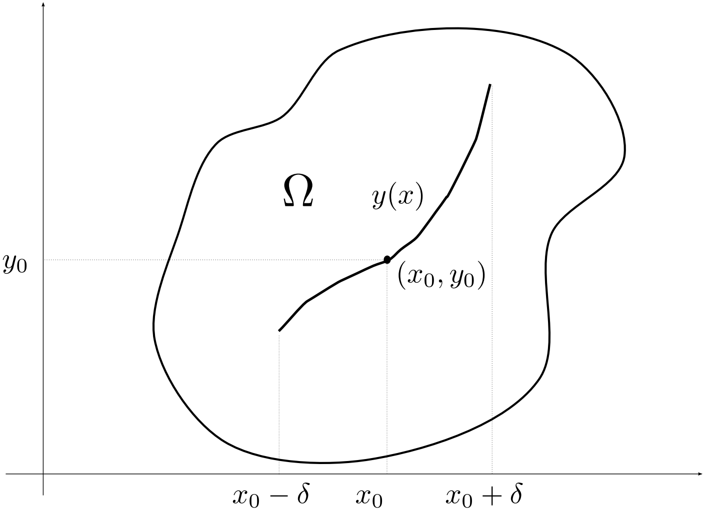
$$|F(x,y_1) - F(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in \Omega,$$

per un'opportuna costante fissa L.

*Allora dato (x_0,y_0) in Ω esiste $\delta > 0$ ed esiste una **unica** funzione $y :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ tale che $\boxed{y(x_0) = y_0}$, $(x,y(x)) \in \Omega$ per ogni $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e y verifica l'equazione*

$$\boxed{y'(x) = F(x,y(x))} \qquad \text{per ogni } x \text{ in }]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

FIGURA



Ω
$y(x)$
y_0
(x_0, y_0)
$x_0 - \delta$
x_0
$x_0 + \delta$

Sistemi di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' = & F_1(x, y_1, \dots, y_N) \\ \vdots & \\ y_N' = & F_N(x, y_1, \dots, y_N) \end{cases} \tag{SYS}$$

dove $F_1, \dots, F_N$ sono delle funzioni continue di $N+1$ variabili.

Se usiamo un "formalismo vettoriale":

$$Y(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_N(x) \end{pmatrix}, \qquad F(x, y_1, \dots, y_n) := \begin{pmatrix} F_1(x, y_1 \dots, y_N) \\ \vdots \\ F_N(x, y_1 \dots, y_N) \end{pmatrix}$$

il sistema si può scrivere come:

$$Y'(x) = F(x, Y(x)).$$

Anche nel caso dei sistemi vale il teorema di Cauchy.
Ricordiamo la definizione di "norma" di un N-vettore $Y = (y_1, \dots, y_n)$:

$$\|Y\|_N = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_N^2}$$

Teorema

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una funzione tale che:

- *$F(x, Y) = F(x, y_1, \dots, y_N)$ è continua nelle $n+1$ variabili;*
- *$F(x, Y)$ è lipschitziana rispetto a Y, cioè esiste L per cui*

$$\|F(x, Y_1) - F(x, Y_2)\|_N \leq L\|Y_1 - Y_2\|_N \quad \forall (x, Y_1), (x, Y_2) \in \Omega,$$

*Allora dato (x_0, Y_0) in Ω esiste $\delta > 0$ ed esiste una **unica** funzione $y :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}^N$ tale che $\boxed{Y(x_0) = Y_0}$, $(x, Y(x)) \in \Omega$ per ogni $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e Y verifica l'equazione*

$$\boxed{Y'(x) = F(x, Y(x))} \qquad \text{per ogni } x \text{ in }]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

Sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$\begin{cases} y_1' = a_{1,1}(x)y_1 + \cdots + a_{1,N}y_N + b_1(x) \\ \quad\vdots \\ y_N' = a_{N,1}(x)y_1 + \cdots + a_{N,N}y_N + b_N(x) \end{cases} \tag{LSYS}$$

dove $a_{i,j}$ e b_i sono funzioni continue su un intervallo I, per $i,j = 1,\dots,N$.
Se poniamo

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(x) & \cdots & a_{1,N}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1}(x) & \cdots & a_{N,N}(x) \end{pmatrix}, \qquad B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_N(x) \end{pmatrix}$$

il sistema si può scrivere in forma vettoriale

$$Y' = A(x)Y + B(x)$$

Osservazione

Per i sistemi lineari vale il teorema di esistenza e unicità in quanto la funzione

$$F(x,Y) = A(x)Y + B(x)$$

è lipschiziana rispetto a Y:

$$\|F(x,Y_1) - F(x,Y_2)\|_N = \|A(x)(Y_1 - Y_2)\|_N \leq \|A(x)\|_{N\times N}\|Y_1 - Y_2\|_N$$

($\|A(x)\|_{N\times N}$ è la norma della matrice $A(x)$) e si ha che $\|A(x)\|_{N\times N}$ ha massimo per $x \in I$ (se I è limitato e chiuso, ma dato x_0 possiamo sempre restringerci a $I_0 = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$ e applicare il teorema su I_0).

Per i sistemi n**on esiste** in generale una formula esplicita per la soluzione, è però possibile mettere in evidenza varie proprietà importanti per le soluzioni.

Teorema

Ogni soluzione $Y(x)$ del problema $Y' = A(x)Y + B(x)$ si può definire su tutto I.
$\boxed{\textit{Non si presenta il fenomeno di esplosione in tempo finito}}$.

Teorema

Siamo $A(x)$ e $B(x)$ come prima, definite per x appartenente a un intervallo I.

- *Se Y_1 e Y_2 sono soluzioni del problema omogeneo $Y' = A(x)Y$ e se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora $\alpha Y_1 + \beta Y_2$ è soluzione del problema omogeneo.*
  DIM
  *Le soluzioni del problema omogeneo **formano uno spazio vettoriale**.*
- *La dimensione dello spazio delle soluzioni del problema omogeneo è N.*
  DIM
- *Sia $\bar{Y}$ una soluzione del problema generale $Y' = A(x)Y + B(x)$. Allora*
  - *Se Y è un'altra soluzione del problema generale, $Y_0 = Y - \bar{Y}$ è soluzione del problema omogeneo;*
  - *se Y_0 è soluzione del problema omogeneo, allora $Y = \bar{Y} + Y_0$ è soluzione del problema generale.*

  *Le soluzioni del problema generale **formano uno spazio affine**. Tale spazio si ottiene prendendo una (qualunque) soluzione del problema e sommandoci tutte le soluzioni del problema omogeneo.* DIM

L'equazione lineare di ordine N

$$a_N(x)y^{(N)} + a_{N-1}y^{(N-1)} + \cdots + a_0(x)y = b(x) \qquad \text{(EQ-N)}$$

dove $a_0, \ldots, a_N, b : I \to \mathbb{R}$ sono continue su I intervallo e $a_N(x) \neq 0$ per $x \in I$.
L'equazione si può ricondurre a un sistema del primo ordine ponendo:

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(N-1)} \end{pmatrix}$$

$$A(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{a_0(x)}{a_N(x)} & -\frac{a_1(x)}{a_N(x)} & -\frac{a_2(x)}{a_n(x)} & \cdots & -\frac{a_{N-1}(x)}{a_N(x)} \end{pmatrix}, B(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b(x)}{a_N(x)} \end{pmatrix}$$

VERIFICA

Si ricava

Teorema

Sia x_0 un punto fissato in I. Per ogni N-pla $y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}$ esiste unica una soluzione di (EQ-N) $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *che verifichi le* condizioni iniziali $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(N-1)} = y_{N-1}$.
Inoltre se $\bar{y}$ è una "soluzione nota" dell'equazione (EQ-N) *allora*

$$\{y : y : I \longrightarrow \mathbb{R}, y \text{ risolve l'equazione (EQ-N)}\} = \\ \{\bar{y} + y_0 : y_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}, y \text{ risolve l'equazione (EQ-N-0)}\}$$

dove (EQ-N-0) *è l'equazione omogenea*

$$a_N(x)y^{(N)} + a_{N-1}y^{(N-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0. \tag{EQ-N-0}$$

Infine l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea (EQ-N-0) *è uno spazio vettoriale di dimensione N.*

L’equazione di ordine due a coefficienti costanti

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{EQN-II}$$

dove $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $f : I \to \mathbb{R}$ è continua.
Il polinomio di secondo grado

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

si dice *polinomio caratteristico dell’equazione* (EQN-II).
Come prima consideriamo prima l’equazione omogenea

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{EQN-II-0}$$

Per motivi di concisione matematica conviene considerare tutto nei numeri complessi – per un momento consideriamo $a, b, c \in \mathbb{C}$ e cerchiamo la soluzione y come una funzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ che verifichi (EQN-II-0). Questo significa che

$$y(x) = u(x) + iv(x), \quad y'(x) = u'(x) + iv'(x), \quad y''(x) = u''(x) + iv''(x),$$

e che l'equazione (EQN-II-0) vale nei complessi: tutti i prodotti sono da intendersi tra numeri complessi e l'eguaglianza a zero vale separatamente per la parte reale e la parte immaginaria di $ay''(x) + by'(x) + cy(x)$.

IDEA

Cerchiamo soluzioni della forma $y(x) = e^{z_0 x}$ con z_0 in $\mathbb{C}$ (da trovare)

Allora $y'(x) = z_0 e^{z_0 x}$ e $y''(x) = z_0^2 e^{z_0 x}$ da cui

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = az_0^2 e^{z_0 x} + bz_0 e^{z_0 x} + ce^{z_0 x} = P(z_0) e^{z_0 x}$$

FATTO

$$y(x) = e^{z_0 x} \text{ risolve (EQN-II-0)} \quad \Leftrightarrow \quad P(z_0) = 0$$

Conseguenza

Se $P(z)$ ha due radici distinte z_1 e z_2, allora le soluzioni dell'equazione omogenea (EQN-II-0) sono descritte (tutte) dalla formula

$$y(x) = c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

(al variare di tutte le possibili costanti c_1 e c_2).

VERIFICA

Caso particolare: due radici reali

Se a, b, c sono reali e se $P(z)$ ha due radici REALI distinte x_1 e x_2, allora le soluzioni reali dell'equazione omogenea (EQN-II-0) sono descritte da

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{x_1 x} + c_2 e^{x_2 x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Caso di due radici complesse

Supponiamo di nuovo che a, b, c siano reali. Supponiamo inoltre che $P(z)$ non abbia radici reali. Ne segue che, visto in $\mathbb{C}$, $P(z)$ ha due radici complesse coniugate $z_{1,2} = a \pm ib$. Per quanto visto prima le soluzioni complesse dell'equazione sono

$$y(x) = c_1 e^{(a+ib)x} + c_2 e^{(a-ib)x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Ricordando che $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$:

$$\begin{aligned} y(x) = e^{ax}(c_1 e^{ibx} + c_2 e^{-ibx}) = e^{ax}((c_1 + c_2)\cos(bx) + i(c_1 - c_2)\sin(bx)) = \\ = e^{ax}(d_1 \cos(bx) + d_2 \sin(bx)) \end{aligned}$$

dove $d_1 = c_1 + c_2$ e $d_2 = i(c_1 - c_2)$. Se ne deduce che le soluzioni reali sono

$$\boxed{e^{ax}(d_1 \cos(bx) + d_2 \sin(bx)) \qquad d_1, d_2 \in \mathbb{R}}$$

Caso di due radici coincidenti

Rimane il caso in cui $P(z)$ ha un'unica radice z_0. Allora

$$P(z) = a(z - z_0)^2 = a(z^2 - 2z_0 z + z_0^2).$$

Anche in questo caso una soluzione è $e^{z_0 x}$ - **dobbiamo trovarne un'altra**. Vediamo che $\boxed{y(x) = xe^{z_0 x}}$ è soluzione. Si ha

$$y'(x) = e^{z_0 x} + xz_0 e^{z_0 x}, \quad y''(x) = 2z_0 e^{z_0 x} + xz_0^2 e^{z_0 x} \qquad \text{da cui}$$

$$a(y'' - 2z_0 y' + z_0^2 y) = a(2z_0 e^{z_0 x} + xz_0^2 e^{z_0 x} - 2z_0(e^{z_0 x} + xz_0 e^{z_0 x}) + z_0^2 x e^{z_0 x})$$
$$ae^{z_0 x}(2z_0 - 2z_0 + x(z_0^2 - 2z_0^2 + z_0^2)) = 0.$$

Nel caso reale $(a, b, c \in \mathbb{R})$ è chiaro che se c'è una sola radice questa è reale, chiamiamola x_0. Allora le soluzioni dell'equazione sono date da:

$$\boxed{y(x) = e^{x_0 x}(c_1 + c_2 x) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.}$$

L'equazione di ordine due non omogenea

Consideriamo solo dei casi particolari (anche se c'è un procedimento generale).

$$ay'' + by' + cy = e^{wx} \tag{1}$$

Di nuovo ci mettiamo nei complessi ($a, b, c \in \mathbb{C}$) e prendiamo $w \in \mathbb{C}$.

$P(w) \neq 0$

Se $P(w) \neq 0$ (w non è radice del polinomio caratteristico), cerchiamo una soluzione particolare della forma $\boxed{\bar{y}(x) = \lambda e^{wx}}$. Si ha

$$\bar{y}'(x) = \lambda w e^{wx}, \qquad \bar{y}''(x) = \lambda w^2 e^{wx} \qquad \text{da cui}$$

$$a\bar{y}''(x) + b\bar{y}'(x) + c\bar{y}(x) = a\lambda w^2 e^{wx} + b\lambda w e^{wx} + c\lambda e^{wx} = \lambda e^{wx} P(w)$$

e imponendo che $\bar{y}$ risolva l'equazione:

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{P(w)}}$$

L'equazione di ordine due non omogenea

Sempre nel caso $f(x) = e^{wx}$.

$P(w) = 0$, $P'(w) = 2aw + b \neq 0$ (z_0 radice semplice di P)

Cerchiamo una soluzione particolare della forma $\boxed{\bar{y}(x) = \lambda x e^{wx}}$. Si ha

$$\bar{y}'(x) = \lambda(1 + wx)e^{wx}, \qquad \bar{y}''(x) = \lambda(2w + w^2 x)e^{wx} \qquad \text{da cui}$$

$$\begin{aligned} a\bar{y}''(x) + b\bar{y}'(x) + c\bar{y}(x) &= \\ a\lambda(2w + w^2 x)e^{wx} + b\lambda(1 + wx)e^{wx} + c\lambda x e^{wx} &= \\ \lambda e^{wx}(P'(w) + P(w)x) &= \lambda e^{wx}(P'(w)) \end{aligned}$$

e imponendo che $\bar{y}$ risolva l'equazione:

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{P'(w)}}$$

L'equazione di ordine due non omogenea

Sempre nel caso $f(x) = e^{wx}$.

$P(w) = 0$, $P'(w) = 0$, $P'(w) = 2a \neq 0$ (z_0 radice doppia di P)

Cerchiamo una soluzione particolare della forma $\boxed{\bar{y}(x) = \lambda x^2 e^{wx}}$. Si ha

$$\bar{y}'(x) = \lambda(2x + wx^2)e^{wx}, \qquad \bar{y}''(x) = \lambda(2 + 4wx + w^2x^2)e^{wx} \qquad \text{da cui}$$

$$\begin{aligned} a\bar{y}''(x) + b\bar{y}'(x) + c\bar{y}(x) = \\ a\lambda(2 + 4wx + w^2x^2)e^{wx} + b\lambda(2x + wx^2)e^{wx} + c\lambda x^2 e^{wx} = \\ \lambda e^{wx}(P''(w) + 2P'(w)x + P(w)x^2) = \lambda e^{wx}(P'(w)) \end{aligned}$$

e imponendo che $\bar{y}$ risolva l'equazione:

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{P''(w)} = \frac{1}{2a}}$$

IN GENERALE, si trova sempre una soluzione particolare di

$$ay'' + by' + cy = p(x)e^{wx} \qquad\qquad (a, b, c, w \in \mathbb{C})$$

dove $p(x)$ è un polinomio di grado n, della forma

$$\bar{y}(x) = q(x)e^{wx}$$

dove

$$q(x) \text{ è un polinomio di grado } \begin{cases} n & \text{se } P(w) \neq 0 \\ n+1 & \text{se } P(w=0),\ P'(w) \neq 0 \\ n+2 & \text{se } P(w=0),\ P'(w) = 0,\ P''(w) \neq 0 \end{cases}$$

Ricordiamo che $P(z) = az^2 + bz + c$ è il polinomio caratteristico dell'equazione.
Notiamo che, se a, b, c, w sono reali e se $p(x)$ è a coefficienti reali, allora $q(x)$ ha coefficienti reali e quindi $\bar{y}(x)$ è una soluzione particolare **reale**.

Supponiamo $a,b,c \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ e $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali di grado n. Se vogliamo trovare una soluzione particolare di

$$(i) \quad ay'' + by' + cy = p(x)\cos(\omega x) \quad / \quad (ii) \quad ay'' + by' + cy = p(x)\sin(\omega x)$$

possiamo passare all'equazione

$$\boxed{ay'' + by' + cy = p(x)e^{i\omega x}}$$

e trovare una soluzione $\bar{y}(x)$ con il metodo precedente. Allora

$$\boxed{\bar{y}_1(x) := \Re e(\bar{y}(x)) \quad \text{risolve } (i) \quad / \quad \bar{y}_2(x) := \Im m(y(x)) \quad \text{risolve } (ii)}.$$

come si verifica facilmente. Alternativamente una soluzione particolare di (i) o (ii) si può cercare della forma

$$\bar{y}(x) = q_1(x)\cos(\omega x) + q_2(x)\sin(x)$$

dove q_1 e q_2 sono polinomi di grado $n/n+1/n+2$ a seconda del fatto che $i\omega$ non sia radice di $P(z)$/ sia radice semplice/sia radice doppia di $P(z)$ (come nel caso del precedente q). Notiamo che ci vogliono sia i seni che i coseni (anche se nel problema iniziale compare solo uno dei due).