ANALISI 1 [1]
QUARTA LEZIONE

[1]prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Sulla radice di due

Dimostriamo che, se

$$l = \sup\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}, \qquad \text{allora } \boxed{l^2 = 2}$$

Prima di tutto l è finito. Infatti se $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ allora:

· $A \neq \emptyset$, dato che per esempio $1 \in A$;
tutti gli elementi di A sono minori o eguali a 2
(se $x > 2$ allora $x^2 > 4$ e quindi $x \notin A$) e quindi
· A è limitato suepriormente e 2 è un maggiorante di A.

quindi $l = \sup A \in [1, 2]$. Dimostriamo che $l^2 = 2$.

Ragioniamo PER ASSURDO. Se $l^2 \neq 2$ deve essere $l^2 < 2$ oppure $l^2 > 2$. Esaminiamo separatamente i due casi

Sulla radice di due

Supponiamo $\boxed{l^2 < 2}$.
Dico che allora esiste un numero x con $x > l$ e $x^2 < 2$.

Cerchiamo x del tipo $x = l + \epsilon$ con $0 < \epsilon < 1$.
Se ne calcoliamo il quadrato:

$$(l + \epsilon)^2 = l^2 + 2l\epsilon + \epsilon^2 < l^2 + 2l\epsilon + \epsilon = l^2 + \epsilon\,(2l + 1) < l^2 + 5\epsilon$$

Se scegliamo $\epsilon = \min\left\{1, \dfrac{2 - l^2}{10}\right\}$ troviamo $0 < \epsilon < 1$, da cui:

$$x^2 = (l + \epsilon)^2 \leq l^2 + 5\,\frac{2 - l^2}{10} = l^2 + \frac{2 - l^2}{2} < l^2 + 2 - l^2 = 2.$$

Allora tale x (verificando $x^2 < 2$) deve appartenere ad A.
Ne segue che $x \leq l = \sup A$ ASSURDO.

Sulla radice di due

Supponiamo $\boxed{l^2 > 2}$.
Dico che allora esiste un numero x con $x < l$ e $x^2 > 2$.

Cerchiamo x del tipo $x = l - \epsilon$ con $0 < \epsilon < 1$.
Calcoliamo il quadrato:

$$(l - \epsilon)^2 = l^2 - 2l\epsilon + \epsilon^2 > l^2 - 4l\epsilon > l^2 - 2\epsilon$$

Se scegliamo $\epsilon = \min \left\{ 1, \dfrac{l^2 - 2}{8} \right\}$ troviamo $0 < \epsilon < 1$, da cui:

$$x^2 = (l - \epsilon)^2 > l^2 - 2\frac{l^2 - 2}{8} = l^2 - \frac{l^2 - 2}{2} > l^2 - l^2 + 2 = 2$$

Allora $0 < x < l = \sup A$ e quindi esiste $x' \in A$ tale che $x < x' \leq l$.
Ne segue $x^2 < (x')^2 < 2$ ASSURDO.

Potenze a esponente intero

Cosa vuole dire $2^\pi = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2$ π volte ???????
Bisogna arrivarci per gradi.
Sia $\boxed{A > 0}$. Allora per ogni n intero definiamo la **potenza** n-sima A^n:

$$A^n := 1 \cdot \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ volte}}$$

Volendo essere veramente rigorosi dovremmo dare una definizione ricorsiva:

$$A^n := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ A(A^{n-1}) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

NOTA: La potenza a *esponente* intero n si può definire per qualunque *base* A e allora si ha:

$$(-A)^n = A^n \quad \text{se } n \text{ è pari,} \qquad (-A)^n = -A^n \quad \text{se } n \text{ è dispari.}$$

Torniamo ad $A > 0$. Valgono un po' di proprietà:

Proprietà delle potenze

1. $\boxed{A^{n+m} = A^n A^m}$ per ogni n, m interi. DIM
2. $\boxed{A^n > 0}$ per ogni n intero. DIM
3. Se $n > 0$ $\boxed{A \mapsto A^n \text{ è strettamente crescente}}$. DIM
4. - Se $0 < A < 1$ allora per ogni n $0 < A^n < 1$ DIM
   - Se $A > 1$ allora per ogni n implica $A^n > 1$
   - $1^n = 1$ per ogni n
5. Se $0 < A < 1$ allora $n < m$ implica $A^m < A^n$ DIM
   Se $A > 1$ allora $n < m$ implica $A^n < A^m$
   GRAFICI

Radici n-sime

Sia $n > 0$ Per quanto visto la funzione $p_n : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ definita da $p_n(x) = x^n$ (con $p(0) = 0$) è strettamente crescente, dunque **iniettiva**.

Da risultati che dimostreremo in seguito si deduce anche che:

$$\forall y > 0 \ (\exists x > 0 : x^n = y) \qquad (x = \inf\{t : t^n \geq y\})$$

cioè p_n è **surgettiva**.

Dunque esiste la funzione $p_n^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$. Tale funzione viene detta **radice n-esima** e si scrive $\boxed{p_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}}$.

NOTA: se n è dispari allora la radice n-esima si può definire su tutto $\mathbb{R}$ (dato che $x \mapsto x^n$ è iniettiva e surgettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$)

Potenze frazionarie

Sia $A > 0$. Valgono le proprietà:

1. $\sqrt[m]{A^n} = (\sqrt[m]{A})^n$ DIM
2. Se $n_1 m_2 = n_2 m_2$ allora $\sqrt[m_1]{A^{n_1}} = \sqrt[m_2]{A^{n_2}}$ DIM

Possiamo allora definire la potenza di un numero razionale positivo $q = \dfrac{n}{m}$ mediante

$$\boxed{A^q = A^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{A^n} = \left(\sqrt[m]{A}\right)^n}$$

Le proprietà dette sopra garantiscono che la potenza è una funzione di q e NON della sua rappresentazione.
Infatti

$$\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_2}{m_2} \Leftrightarrow n_1 m_2 = n_2 m_1 \Leftrightarrow A^{\frac{n_1}{n_2}} = A^{\frac{n_2}{m_2}}$$

· Se $A < 0$ questo **non è vero**: $\sqrt[3]{-1} = -1$, $\sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$

· Se n è dispari $\sqrt[n]{x}$ è definita per ogni x, $x^{\frac{1}{n}}$ **solo** per $x \geq 0$

Proprietà delle potenze a esponente frazionario

1. $\boxed{A^{q_1+q_2} = A^{q_1}A^{q_2}}$ per ogni $q_1, q_2 \geq$ razionali. DIM
2. Se $q > 0$ è razionale $\boxed{A \mapsto A^q \text{ è strettamente crescente}}$. DIM
3. Se $0 < A < 1$ allora $q_1 < q_2$ in $\mathbb{Q}$ implica $A^{q_2} < A^{q_1}$ DIM
   Se $A > 1$ allora $q_1 < q_2$ in $\mathbb{Q}$ implica $A^{q_1} < A^{q_2}$

Se $q \in \mathbb{Q}, q < 0$ possiamo definire $\boxed{A^q := \frac{1}{A^{-q}}}$. Si vede facilmente che le proprietà (1) e(3) scritte sopra valgono anche per le q negative (mentre la monotonia della potenza si inverte).

Vogliamo ora definire A^x per x reale. L'idea, nel caso $A > 1$, è:

$$A^x = \sup\{A^q : q \in \mathbb{Q}, q \leq x\}$$

o anche

$$A^x = \inf\{A^q : q \in \mathbb{Q}, q \geq x\}$$

Un Lemma

Dato un qualunque numero reale positivo $\epsilon > 0$ esiste un intero $m > 0$ tale che

$$1 - \epsilon < \sqrt[m]{A} < 1 + \epsilon$$

DIM

CONSEGUENZA: Dato un qualunque x reale si ha:

$$\sup\{A^q : q \in \mathbb{Q}, q \leq x\} = \inf\{A^q : q \in \mathbb{Q}, q \geq x\} \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

DIM

Possiamo ora **definire** A^x come uno dei due estremi sopra.

Proprietà delle potenze a esponente reale

1. $\boxed{A^{x_1+x_2} = A^{x_1} A^{x_2}}$ per ogni x_1, x_2 reali. DIM
2. Se $x > 0$ $\boxed{A \mapsto A^x \text{ è strettamente crescente}}$. DIM
   Se $x < 0$ $\boxed{A \mapsto A^x \text{ è strettamente decrescente}}$.
3. Se $0 < A < 1$ allora $x_1 < x_2$ in $\mathbb{R}$ implica $A^{x_2} < A^{x_1}$ DIM
   Se $A > 1$ allora $x_1 < x_2$ in $\mathbb{R}$ implica $A^{x_1} < A^{x_2}$
4. Dati A e B maggiori di zero, allora $\boxed{(AB)^x = A^x B^x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ DIM
5. Dati $A > 1$ e $x, y \in \mathbb{R}$, allora $\boxed{((A)^x)^y = A^{xy}}$.

Esponenziali e logaritmi

Se $A > 0$ la **funzione esponenziale di base** A è la funzione $x \mapsto A^x$. Se la indichiamo con $\exp_A$, si ha $\exp_A : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$; inoltre:

$$\exp_A \begin{cases} \text{è strettamente crescente} & \text{se } A > 1 \\ \text{è strettamente decrescente} & \text{se } 0 < A < 1 \\ \text{vale costantemente } 1 & \text{se } A = 1 \end{cases}$$

e quindi, se $A \neq 1$ è iniettiva. Si può inoltre vedere che, per $A > 1$

$$\forall y > 0 \text{ posto } x := \inf\{x : A^x \geq y\} \qquad \text{risulta } A^x = y$$

e quindi, se $A > 1$ $\exp_A$ è surgettiva
(lo stesso vale per $0 < A < 1$ usando il sup invece dell'inf).
Dunque esiste la funzione inversa $(\exp_A^{-1}) :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, che viene detta **logaritmo in base** A, e indicata con $\log_A$.

Proprietà dei logaritmi

1. $\log_A$ è strettamente crescente, se $A > 1$;
   $\log_A$ è strettamente decrescente, se $A < 1$;
2. $\log_A(xy) = \log_A(x) + \log_A(y)$ per ogni $x, y > 0$;
3. $\log_A(x^y) = y \log_A(x)$ per ogni $x > 0$ e ogni $y \in \mathbb{R}$
4. $\log_A(1) = 0$, $\log_A(A) = 1$.

Notiamo che

$$\log_A(1) = 0 \qquad\qquad \log_A(A) = 1$$

Si usa quasi sempre come base per gli esponenziali e i logaritmi il numero e (costante di Neper).
Allora togliamo A dalla notazione:

$$e^x = \exp(x), \qquad \log_e(x) = \ln(x).$$

Differenza di due potenze

Vale la seguente importante formula

$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + B^{n-1}) = (A-B)\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k}B^k$$

DIM

Per esempio

- $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$
- $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$
- $A^4 - B^4 = (A-B)(A^3 + A^2B + AB^2 + B^3)$

Nel caso $B = 1$ si trova

$$A^n - 1 = (A-1)(A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + A + 1) = (A-1)\sum_{k=0}^{n-1} A^k$$

da cui si ricava la **somma della progressione geometrica**:

$$\sum_{k=0}^{n} A^k = 1 + A + A^2 + \cdots A^n = \frac{A^{n+1} - 1}{A - 1}$$

Un esempio: la rata di un mutuo

Supponiamo di avere un debito D di pagare in N anni (o mesi o altra unità di tempo) a un interesse i.

Il pagamento avviene mediante il versamento di una rata annuale fissa R.

Possiamo schematizzare il problema in questo modo: per ogni anno n compreso tra $n = 0$ (istante iniziale) ed $n = N$ chiamiamo D_n il debito residuo. Allora

- $D_0 = D$
- $D_{n+1} = \underbrace{(1+i)D_n}_{\text{interesse}} - R$

Per esempio:

$$D_1 = (1+i)D_0 - R$$

$$D_2 = (1+i)\left[(1+i)D_0 - R\right] - R = (1+i)^2 D_0 - (1+i)R - R$$

$$D_3 = (1+i)\left[(1+i)^2 D_0 - (1+i)R - R\right] - R =$$

$$(1+i)^3 D_0 - (1+i)^2 R - (1+i)R - R$$

Dopo n passi allora (si dimostra per induzione ...)

$$D_n = (1+i)^n D_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^k R = (1+i)^n D_0 - R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Se vogliamo che il debito sia estinto appunto dopo N rate:

$$D_N = 0 \Leftrightarrow (1+i)^N D_0 = R\frac{(1+i)^N - 1}{i} \Leftrightarrow R = \frac{i(1+i)^N D_0}{(1+i)^N - 1}$$

In questo caso la somma pagata alla fine sarà

$$NR = N\frac{i(1+i)^N}{(1+i)^N - 1} D_0$$

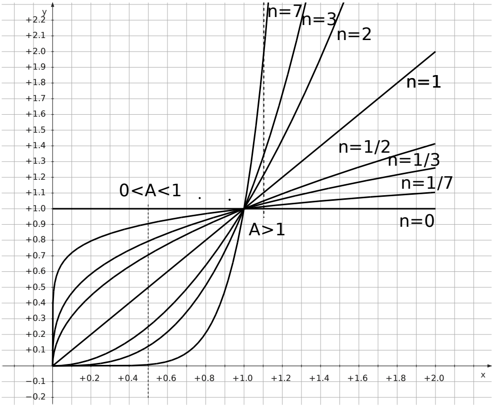
Per esempio se $i = 0,05$ (il 5 per cento) e $N = 10$ alla fine si paga

$$10\frac{0,05(1.05)^{10}}{(1,05)^{10} - 1} = \simeq 1.3 \text{ volte il debito iniziale}$$

Nel 1989 chi scrive contrasse un mutuo decennale con interesse semestrale del 6,75 per cento (13.5 annuale). In quel caso $N = 20$ $i = 0,0675$ e la cifra complessiva pagata fu

$$20\frac{0,0675(1.0675)^{20}}{(1,0675)^{20} - 1} = \simeq 1.85 \text{volte il debito iniziale}$$

Grafici delle potenze intere e delle relative radici



INDIETRO

Dimostrazione di (1)

$A^{n+m} = A^n A^m$

Dimostrazione.

Fissiamo m e dimostriamo la proprietà per induzione su n:

$\boxed{n = 0}$

Se $n = 0$ allora $A^{0+m} = A^m = A^m \cdot 1 = A^m A^0$

dunque la proprietà è vera.

$\boxed{\text{Passo induttivo}}$

Supponiamo che $A^{m+n} = A^m A^n$. Allora:

$$A^{(n+1)+m} = A^{n+m+1} \underbrace{= AA^{n+m}}_{\text{def. di potenza}} \underbrace{= AA^n A^m}_{\text{ip. induttiva}} = \underbrace{A^{n+1} A^m}_{\text{def. di potenza}}$$

Per il principio di induzione la proprietà è vera per ogni $n \geq 1$.

INDIETRO $\square$

Dimostrazione di (2)

$A^n > 0$

Dimostrazione.
Per induzione:

$\boxed{n = 0}$
Se $n = 0$ allora $A^0 = 1 > 0$ dunque la proprietà è vera.

$\boxed{\text{Passo induttivo}}$
Supponiamo che $A^n > 0$. Allora:

$$A^{n+1} \underbrace{= AA^n}_{\text{def. di potenza}} \underbrace{> A \cdot 0}_{\text{ip. induttiva}} = 0$$

Per il principio di induzione la proprietà è vera per ogni $n \geq 1$.

INDIETRO

Dimostrazione di (3)

$A \mapsto A^n$ è strettamente crescente

Dimostrazione.

Per induzione su n a partire da $n = 1$:

$\boxed{n = 1}$

Se $n = 1$ allora $A^1 = A$ e quindi è ovvio che $A < A'$ implica $A^1 < (A')^1$.

$\boxed{\text{Passo induttivo}}$

Supponiamo che $A \mapsto A^n$ sia strettamente crescente.
Siano $A < A'$. Allora:

$$A^{n+1} \underbrace{= AA^n < A}_{\text{def. di potenza}} \underbrace{< A(A')^n}_{\text{ip. induttiva}} < A'(A')^n \underbrace{= (A')^{n+1}}_{\text{def. di potenza}}$$

Per il principio di induzione la proprietà è vera per ogni $n \geq 1$.
(notiamo che nella dimostrazione si è usato $A^n \geq 0$). INDIETRO $\square$

Dimostrazione di (4)

se $0 < A < 1$ allora $0 < A^n < 1$ per ogni $n \geq 1$

Dimostrazione.

Per induzione su n a partire da $n = 1$:

$\boxed{n = 1}$

Se $n = 1$ allora $A^1 = A \in]0, 1[$

$\boxed{\text{Passo induttivo}}$

Supponiamo che $0 < A^n < 1$. Allora:

$$A^{n+1} \underbrace{= AA^n}_{\text{def. di potenza}} \underbrace{\Rightarrow A \cdot 0 < A^{n+1} < A \cdot 1}_{\text{ip. induttiva}} \Rightarrow 0 < A^{n+1} < 1$$

Per il principio di induzione la proprietà è vera per ogni $n \geq 1$.

Nello stesso modo si vede che

se $A > 1$ allora $A^n > 1$ per ogni $n \geq 1$ INDIETRO

Dimostrazione di (5)

se $0 < A < 1$ allora $(n < m) \rightarrow (A^m < A^n)$

Dimostrazione.

Si ha:

$$n < m \Leftrightarrow (m - n) > 0 \Rightarrow 0 < A^{m-n} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \cdot A^n < A^n A^{m-n} < A^n \cdot 1 \Leftrightarrow 0 < A^m < A^n$$

Analogamente se $A > 1$

$n < m \Leftrightarrow (m-n) > 0 \Rightarrow A^{m-n} > 1 \Rightarrow A^n A^{m-n} > A^n \cdot 1 \Leftrightarrow A^m > A^n$

INDIETRO

□

Dimostrazione di (6)

$$\sqrt[m]{A^n} = (\sqrt[m]{A})^n$$

Dimostrazione.

Dato che la potenza $x \mapsto x^m$ è strettamente crescente si ha:

$$\sqrt[m]{A^n} = (\sqrt[m]{A})^n \Leftrightarrow \left(\sqrt[m]{A^n}\right)^m = \left((\sqrt[m]{A})^n\right)^m \Leftrightarrow$$

$$A = \left(\sqrt[m]{A}\right)^{nm} \Leftrightarrow A^n = \left((\sqrt[m]{A})^m\right)^n \Leftrightarrow A^n = A^n$$

e quindi l'affermazione è vera. INDIETRO $\square$

Dimostrazione di (7)

se $n_1 m_2 = n_2 m_1$ allora $\sqrt[m_1]{A^{n_1}} = \sqrt[m_2]{A^{n_2}}$

Dimostrazione.

Dato che la potenza $x \mapsto x^{m_1 m_2}$ è strettamente crescente si ha:

$$\sqrt[m_1]{A^{n_1}} = \sqrt[m_2]{A^{n_2}} \Leftrightarrow \left(\sqrt[m_1]{A^{n_1}}\right)^{m_1 m_2} = \left(\sqrt[m_2]{A^{n_2}}\right)^{m_1 m_2} \Leftrightarrow$$

$$(A^{n_1})^{m_2} = (A^{n_2})^{m_1} \Leftrightarrow A^{n_1 m_2} = A^{n_2 m_1}$$

che è vera essendo $n_1 m_2 = n_2 m_1$ e quindi l'affermazione è dimostrata. INDIETRO $\square$

Dimostrazione di (8)

$A^{q_1+q_2} = A^{q_1} A^{q_2}$

Dimostrazione.

Se $q_1 = \dfrac{n_1}{m_1}$ e $q_2 = \dfrac{n_2}{m_2}$:

$$A^{q_1+q_2} = A^{\frac{n_1}{m_1}+\frac{n_2}{m_2}} = A^{\frac{n_1 m_2 + n_2 m_1}{m_1 m_2}}$$

Elevando alla $m_1 m_2$:

$$\left(A^{q_1+q_2}\right)^{m_1 m_2} = A^{n_1 m_2 + n_2 m_1} = A^{n_1 m_2} A^{n_2 m_1} =$$

$$\left(A^{\frac{n_1}{m_1}}\right)^{m_1 m_2} \left(A^{\frac{n_2}{m_2}}\right)^{m_1 m_2} = (A^{q_1} A^{q_2})^{m_1 m_2}$$

Dato che la potenza $x \mapsto x^{m_1 m_2}$ è strettamente crescente:

$$A^{q_1+q_2} = A^{q_1} A^{q_2}.$$

□

Dimostrazione di (9)

$A \mapsto A^q$ è strettamente crescente

Dimostrazione.
Sia $q = \dfrac{n}{m}$. Allora:

$$A < A' \Rightarrow A^n < (A')^n \Rightarrow \sqrt[m]{A^n} < \sqrt[m]{(A')^n} \Leftrightarrow A^q < (A')^q$$

INDIETRO

$\square$

Dimostrazione di (10)

$q \mapsto A^q$ crescente/decrescente a seconda di $A > 1/A < 1$

Dimostrazione.

Caso $\boxed{0 < A < 1}$.Per la crescenza di $A \mapsto A^q$ si ha:

$$0 < A^q < 1 \qquad \forall q \in \mathbb{Q}, q > 0$$

Siano allora q_1, q_2 in $\mathbb{Q}$ con $q_1 < q_2$. Si ha

$$A^{q_1} - A^{q_2} = A^{q_1}\left(1 - A^{q_2 - q_1}\right) \qquad \text{e quindi:}$$

$$q_1 < q_2 \Leftrightarrow (q_2 - q_1) > 0 \Rightarrow 0 < A^{q_2 - q_1} < 1 \Rightarrow \left(1 - A^{q_2 - q_1}\right) > 0$$
$$\Rightarrow A^{q_1}\left(1 - A^{q_2 - q_1}\right) > 0 \Leftrightarrow A^{q_1} > A^{q_2}.$$

In maniera analoga si verifica che, se $A > 1$:

$$q_1 < q_2 \Leftrightarrow A^{q_1} < A^{q_2}$$

INDIETRO

$\square$

Dimostrazione del Lemma

$\forall \epsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{Q}, m > 0, \quad 1 - \epsilon < \sqrt[m]{A} < 1 + \epsilon$

Consideriamo il caso $A > 1$. Allora ci serve trovare m intero positivo tale che

$$\sqrt[m]{A} < 1 + \epsilon \Leftrightarrow A < (1+\epsilon)^m \underbrace{\Leftarrow A < 1 + m\epsilon}_{\text{dis. di Bernoulli}} \Leftrightarrow m > \frac{A-1}{\epsilon}$$

Quindi tale m si riesce a trovare qualunque sia $\epsilon > 0$.
È ovvio a questo punto che vale anche la disuguaglianza di sinistra:

$$1 - \epsilon < \sqrt[m]{A} < 1 + \epsilon$$

NOTA: In realtà abbiamo trovato più di un intero che verifica la proprietà richiesta : **tutti gli interi da un certo punto in poi** vanno bene.

INDIETRO

Dimostrazione della conseguenza

Consideriamo il caso $A > 1$. Allora $q \mapsto A^q$ è crescente.
Quindi $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, $q_1 \leq x \leq q_2 \Rightarrow A^{q_1} \leq A^{q_2}$ da cui

$$l_1 := \sup\{A^q : q \in \mathbb{Q}, q \leq x\} \leq \inf\{A^q : q \in \mathbb{Q}, q \geq x\} =: l_2$$

Viceversa prendiamo $\epsilon > 0$ e prendiamo k intero con $x \leq k$.
Usando il Lemma possiamo trovare un $m > 0$ intero tale che $A^{\frac{1}{m}} < 1 + \epsilon/A^k$.
Prendiamo poi $n := \min\left\{n' : \dfrac{n'}{m} > x\right\}$ e poniamo

$$q_1 := \frac{n-1}{m}, \qquad q_2 := \frac{n}{m} \qquad \Rightarrow q_1 \leq x < q_2$$

D'altra parte

$$A^{q_2} - A^{q_1} = A^{q_1}\left(A^{q_2-q_1} - 1\right) \leq A^k\left(A^{\frac{1}{m}} - 1\right) \leq A^k(\epsilon/A^k) = \epsilon.$$

Allora

$$0 \leq l_2 - l_1 \leq A^{q_2} - A^{q_1} \leq \epsilon \qquad \forall \epsilon > 0$$

da cui può essere solo $l_1 = l_2$. INDIETRO

$A^{x_1+x_2} = A^{x_1} A^{x_2}$

Dimostrazione.

Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Se $x_1 \leq q_1$ e $x_2 \leq q_2$ con $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$:

$$A^{x_1+x_2} \leq A^{q_1+q_2} = A^{q_1} A^{q_2}$$

Prendendo l'inf al variare di $q_1 \geq x_1$:

$$A^{x_1+x_2} \leq A^{x_1} A^{q_2} \quad \forall q_2 \in \mathbb{Q}, q_2 \geq x_2$$

poi l'inf al variare di $q_2 \geq x_2$ $\qquad A^{x_1+x_2} \leq A^{x_1} A^{x_2}$

Viceversa se $x_1 \geq q_1$ e $x_2 \geq q_2$ con $Q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$:

$$A^{x_1+x_2} \geq A^{q_1+q_2} = A^{q_1} A^{q_2} \qquad \forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}, q_1 \leq x_1, q_2 \leq x_2 \;\Rightarrow$$

(passando ai sup) $\qquad A^{x_1+x_2} \geq A^{x_1} A^{q_2} \qquad \forall q_2 \in \mathbb{Q}, q_2 \leq x_2 \;\Rightarrow$

$$A^{x_1+x_2} \geq A^{x_1} A^{x_2}$$

INDIETRO

$\square$

se $x > 0$ $A \mapsto A^x$ è strettamente crescente

Dimostrazione.

In effetti, supponendo $A < A'$

$$A^x < (A')^x \Leftrightarrow \frac{A^x}{(A')^x} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{A}{A'}\right)^x < 1$$

e l'ultima disuguaglianza vale poiché $\frac{A}{A'} < 1$. INDIETRO $\square$

se $A > 1$ $x \mapsto A^x$ è strettamente crescente

Dimostrazione.

Siano $x < x'$ in $\mathbb{R}$.Per la densità dei razionali nei reali esistono q, q' in $\mathbb{Q}$ tali che

$$x < q < q' < x'$$

Me segue

$$A^x \leq A^q < A^{q'} \leq A^{x'}$$

INDIETRO

$\square$

$(AB)^x = A^x B^x$

Dimostrazione.

Siano q', q'' in $\mathbb{Q}$ tali che $x \leq q'$, $x \leq q''$. Sia $q = \min(q', q'')$.

$$A^{q'} B^{q''} \geq A^q B^q = (AB)^q \geq (AB)^x$$

$$\underline{\text{inf rispetto a } q'} \Rightarrow \qquad A^x B^{q''} \geq (AB)^x \quad \forall q'' \geq x, q'' \in \mathbb{Q}$$

$$\underline{\text{inf rispetto a } q''} \Rightarrow \qquad A^x B^x \geq (AB)^x.$$

Viceversa se $q', q'' \in \mathbb{Q}$ e $x \geq q'$, $x \geq q''$, e se $q = \max(q', q'')$

$$A^{q'} B^{q''} \leq A^q B^q = (AB)^q \leq (AB)^x$$

$$\underline{\text{sup rispetto a } q'} \Rightarrow \qquad A^x B^{q''} \leq (AB)^x. \quad \forall q'' \leq x, q'' \in \mathbb{Q} \Rightarrow$$

$$\underline{\text{sup rispetto a } q''} \Rightarrow \qquad A^x B^x \leq (AB)^x.$$

INDIETRO

$\square$

Differenza di due potenze

Dimostriamo per induzione la formula:

$$A^n - B^n = (A - B) \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} B^k$$

$\boxed{n = 1}$ In questo caso la sommatoria contiene solo il termine con $k = 0$ e quindi la formula diventa $A^1 - B^1 = (A - B)A^{0-0}B0$, cioè $0 = 0$ che è vera.

Differenza di due potenze

$\boxed{\text{Passo induttivo}}$ Supponiamo vera la formula per n.
Moltiplichiamola per A

$$A(A^n - B^n) = A^{n+1} - AB^n = A(A-B)\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k}B^k$$

$$= (A-B)\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k}B^k$$

Aggiungiamo $AB^n - B^{n+1}$ a entrambi i lati:

$$A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B)\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k}B^k + AB^n - B^{n+1}$$

$$= (A-B)\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k}B^k + (A-B)B^n = (A-B)\sum_{k=0}^{n} A^{n-k}B^k$$

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che l'elemento n-esimo della sommatoria fa B^n.