dimostrazione di (3.6). Supponiamo per esempio che f sia crescente e che $x_0 < b$ Poniamo

$$l^+ := \inf_{x \in I, x_0 < x} f(x)$$

Consideriamo il caso $l^+ \in \mathbb{R}$.
Per la caratterizzazione dell'estremo inferiore (finito) si ha

$$\begin{aligned} & l^+ \leq f(x) \quad \forall x \in I, x > a \\ & \forall \epsilon > 0 \quad \exists\, x_\epsilon \in I \text{ con } x_\epsilon > x_0 : f(x') < l^+ + \epsilon \end{aligned}$$

Facciamo vedere che l^+ è il limite destro. Sia $\epsilon > 0$ e sia x_ϵ come sopra. Allora se $x_0 < x < x_\epsilon$ si ha

$$l^+ - \epsilon < l^+ \leq f(x) \leq f(x_\epsilon) < l^+ + \epsilon$$

Per l'arbitrarietà di ϵ abbiamo mostrato(con la definizione) che il limite destro di f in x_0 è eguale a l^+.
Consideriamo il caso $l^+ = -\infty$ - allora f non è inferiormente limitata a destra di x_0, cioè

$$\forall C \in \mathbb{R} \qquad \exists\, x_C \in I \text{ con } x_C > x_0 : f(x_C) < C$$

Ma allora se $x_0 < x < x_C$ si ha $f(x) \leq f(x) < C$ che vuol dire che f tende a $-\infty$ per $x \to x_0^+$.Nello stesso modo si tratta il limite sinistro.

Supponiamo infine che $a < x < b$; allora

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x \in I, x < x_0} f(x) \leq f(x_0) \leq \inf_{x \in I, x > x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

che dice il resto della tesi. □

7 Il Teorema di Bolzano - Weierstrass

Teorema 7.1 (Bolzano - Weierstrass). *Se* $(\mathbf{x}_n)$ *è una successione limitata in* $\mathbb{R}^N$*, allora* $(\mathbf{x}_n)$ *ammette una sottosuccessione convergente. Questo significa che esistono una successione strettamente crescente di interi* (σ_n) *e un punto* $\mathbf{l}$ *in* $\mathbb{R}^M$ *tali che* $\mathbf{x}_{\sigma_n} \to \mathbf{l}$ *(per* $n \to +\infty$*).*

Dimostrazione. Dimostriamo solo il caso unidimensionale (N=1). In questo caso abbiamo una successione (x_n) di numeri reali che sono tutti compresi un un fissato intervallo $[-M, M]$. Cercheremo di individuare un punto limite per (x_n) mediante un *procedimento di bisezione*: si ragiona come segue.

passo 0 Si pone $\alpha_0 := -M$ e $\beta_0 := M$.

passo 1 Si pone $\gamma_0 := (\alpha_0 + \beta_0)/2$ (il punto medio tra α_0 e β_0 che, nel primo passo, viene ad essere 0). Dato che $x_n \in [\alpha_0, \beta_0]$ $\forall n$ almeno uno tra i due sottointervalli $[\alpha_0, \gamma_0]$ e $[\gamma_0, \beta_0]$ contiene x_n per infiniti valori di n. Se tale proprietà é verificata da $[\alpha_0, \gamma_0]$ poniamo $\alpha_1 := \alpha_0$ e $\beta_1 := \gamma_0$. Se $[\alpha_0, \gamma_0]$ non verifica tale proprietà (e quindi la verifica $[\gamma_0 \beta_0]$) poniamo $\alpha_1 := \gamma_0$ e $\beta_1 := \beta_0$. In questo modo abbiamo costruito un intervallo $[\alpha_1, \beta_1]$ contenuto in $[\alpha_0, \beta_0]$ tale che $\beta_1 - \alpha_1 = (\beta_0 - \alpha_0)/2$ (l'ampiezza si è dimezzata) e

$$x_n \in [\alpha_1, \beta_1] \qquad \text{per infiniti } n$$

passo 2 Si pone $\gamma_1 := (\alpha_1 + \beta_1)/2$. Dato che $x_n \in [\alpha_1, \beta_1]$ per infiniti n almeno uno tra i due sottointervalli $[\alpha_1, \gamma_1]$ e $[\gamma_1, \beta_1]$ contiene x_n per infiniti valori di n. Se tale proprietà é verificata da $[\alpha_1, \gamma_1]$ poniamo $\alpha_2 := \alpha_1$ e $\beta_2 := \gamma_1$ altrimenti poniamo $\alpha_2 := \gamma_1$ e $\beta_2 := \beta_1$. In questo modo abbiamo costruito un intervallo $[\alpha_2, \beta_2]$ contenuto in $[\alpha_1, \beta_1]$ tale che $\beta_2 - \alpha_2 = (\beta_1 - \alpha_1)/2 = (\beta_0 - \alpha_0)/4$ e

$$x_n \in [\alpha_2, \beta_2] \qquad \text{per infiniti } n$$

$$\vdots$$

passo k Si pone $\gamma_{k-1} := (\alpha_{k-1} + \beta_{k-1})/2$. Dato che $x_n \in [\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}]$ per infiniti n almeno uno tra i due sottointervalli $[\alpha_{k-1}, \gamma_{k-1}]$ e $[\gamma_{k-1}, \beta_{k-1}]$ contiene x_n per infiniti valori di n. Se tale proprietà é verificata da $[\alpha_{k-1}, \gamma_{k-1}]$ poniamo $\alpha_k := \alpha_{k-1}$ e $\beta_k := \gamma_{k-1}$ altrimenti poniamo $\alpha_k := \gamma_{k-1}$ e $\beta_k := \beta_{k-1}$. In questo modo abbiamo costruito un intervallo $[\alpha_k, \beta_k]$ contenuto in $[\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}]$ tale che $\beta_k - \alpha_k = (\beta_{k-1} - \alpha_{k-1})/2 = \cdots = (\beta_0 - \alpha_0)/2^k$ e

$$x_n \in [\alpha_k, \beta_k] \qquad \text{per infiniti } n$$

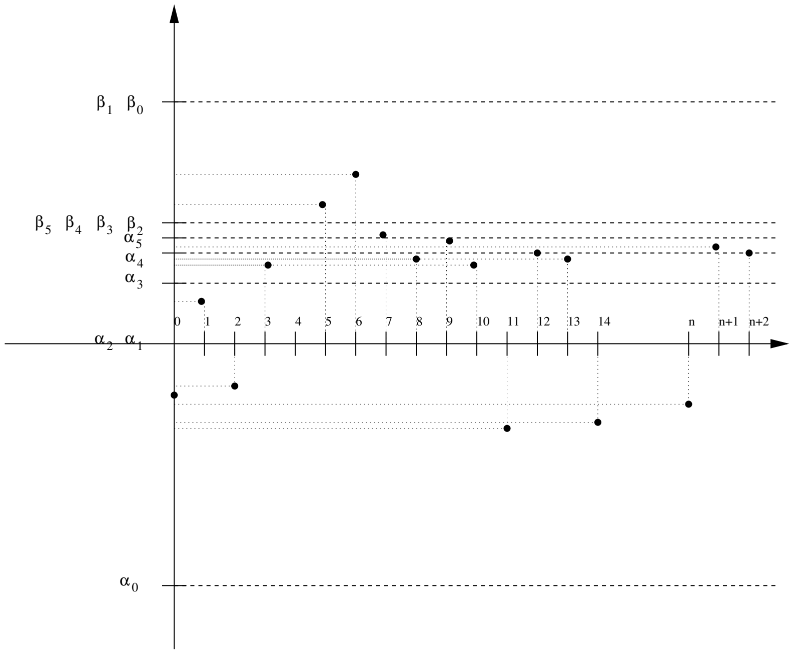
A questo punto abbiamo costruito due successioni $(\alpha_k)_k$ e $(\beta_k)_k$ che verificano

$$\alpha_0 \le \alpha_{k-1} \le \alpha_k < \beta_k \le \beta_{k-1} \le \beta_0 \qquad \forall k \ge 1$$

Quindi (a_k) è crescente, (b_k) è decrescente ed entrambe sono limitate. Ne segue che esistono α e β tali che $\alpha_k \to \alpha$ e $\beta_k \to \beta$ per $k \to +\infty$. Dato che

$$\beta - \alpha = \lim_{k \to +\infty} \beta_k - \alpha_k = \lim_{k \to +\infty} \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^k} = 0$$

si deduce $\beta = \alpha$. Per non fare preferenze chiamiamo l il valore comune di α e β. Vogliamo ora trovare una estratta da (x_n) che converge a l. Per questo



poniamo:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_0 = 0 \\
&\sigma_1 = \min\{n > 0 : x_n \in [\alpha_1, \beta_1]\} \\
&\sigma_2 = \min\{n > 1 : x_n \in [\alpha_2, \beta_2]\} \\
&\vdots \\
&\sigma_k = \min\{n > k-1 : x_n \in [\alpha_k, \beta_k]\}
\end{aligned}
$$

è chiaro che per ogni k è possibile definire σ_k come sopra, dato che abbiamo infiniti n a disposizione. Allora (σ_k) è strattamente crescente e

$$\alpha_k \leq x_{\sigma_k} \leq \beta_k \qquad \forall k$$

da cui (per i due carabinieri) $x_{\sigma_k} \to l$. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Osservazione 7.2. *Non è troppo difficle far vedere che il Teorema di Bolzano - Weierstrass è equivalente al seguente enunciato (che è la versione originale del teorema):*

Ogni insieme limitato e infinito ammette almeno un punto di accumulazione.

8 Funzioni continue

Definizione 8.1. *Siano $A \subset \mathbb{R}^N$, $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^M$ e $\mathbf{x}_0 \in A$. Diciamo che $\mathbf{f}$ è continua in $\mathbf{x}_0$ se*

$$\forall \epsilon > o \quad \exists\, r > 0 : \textit{per ogni } \mathbf{x} \textit{ in } I(\mathbf{x}_0, r) \cap A \textit{ si ha } \mathbf{f}(x) \in I(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \epsilon)$$

Diciamo che $\mathbf{f}$ è continua in un sottoinsieme A' di A (che potrebbe essere tutto A) se $\mathbf{f}$ è continua in tutti i punti $\mathbf{x}$ di A'.

Osservazione 8.2. *La definizione di continuità somiglia molto a quella di limite, ma non è eguale. Infatti non si chiede che $\mathbf{x}_0$ sia di accumulazione per A. Si vede abbastanza facilmente che:*

- *se $\mathbf{x}_0$ non è di accumulazione per A, qualunque funzione $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^N$ è continua in $\mathbf{x}_0$;*
- *se $\mathbf{x}_0$ è di accumulazione per A, allora una funzione $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^N$ è continua in $\mathbf{x}_0$ se e solo se*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$

Si può anche caratterizzare la continuità tramite le successioni: se $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^N$ e $\mathbf{x}_0 \in A$ sono equivalenti i due fatti seguenti:

1. *$\mathbf{f}$ è continua in $\mathbf{x}_0$*
2. *per ogni successione $(\mathbf{x}_n)$ di punti di A tale che $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$, si ha che $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{l}$.*

Rispetto all'analogo enunciato sui limiti qui si suppone $\mathbf{l} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ e non si escluse che la successione $(\mathbf{x}_n)$ assuma il valore $\mathbf{x}_0$ (per esempio che sia identicamente eguale a $\mathbf{x}_0$.

I seguenti enunciati sono conseguenze quasi immediate delle corrispondenti proprietà dei limiti.

Proposizione 8.3 (algebra delle funzioni continue). *Siano $A \subset \mathbb{R}^N$ e $\mathbf{x}_0$ un punto di A.*

- *Se $\mathbf{f}, \mathbf{g} : A \to \mathbb{R}^M$ sono continue in $\mathbf{x}_0$, allora $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ è continua in $\mathbf{x}_0$.*
- *Se $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^M$ e $g : A \to \mathbb{R}$ sono continue in $\mathbf{x}_0$, allora $g\mathbf{f}$ è continua in $\mathbf{x}_0$.*

- *Se $g : A \to \mathbb{R}$ è continua in $\mathbf{x}_0$ e $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, allora $1/g$ è continua in $\mathbf{x}_0$.*

Proposizione 8.4 (composizione di funzioni continue). *Siano $A \subset \mathbb{R}^N$, $B \subset \mathbb{R}^M$, $\mathbf{x}_0$ un punto di A e $\mathbf{y}_0$ un punto di B. Siano $\mathbf{f} : A \to B$ una funzione continua in $\mathbf{x}_0$ tale che $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ e sia $\mathbf{g} : B \to \mathbb{R}^P$ una funzione continua in $\mathbf{y}_0$. Allora la funzione $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^P$ è continua in $\mathbf{x}_0$.*

Proposizione 8.5. *Siano $A \subset \mathbb{R}^N$, $\mathbf{x}_0$ un punto di A ed $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^M$ una funzione. Indichiamo con $f_1, \ldots, f_M : A \to \mathbb{R}$ le componenti di $\mathbf{f}$, cioè*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_M(\mathbf{x})) = (f_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, f_M(x_1, \ldots, x_N))$$

Allora $\mathbf{f}$ è continua in $\mathbf{x}_0$ se e solo se tutte le f_i, $i = 1, \ldots, M$, sono continue in $\mathbf{x}_0$.

Esempio 8.6. *Da quanto fatto nella parte sui limiti si deduce che:*

- *i polinomi $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ e le funzioni razionali $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (dove P e Q sono polinomi):*
- *le funzioni radici $f(x) = \sqrt[n]{x}$;*
- *le funzioni esponenziali $f(x) = A^x$;*
- *le funzioni logaritmiche $f(x) = \log_A(x)$;*
- *le funzioni trigonometriche $f(x) = \sin(x)/\cos(x)/\tan(x)$*

sono tutte continue in ogni x in cui sono definite. Inoltre tutte le funzioni ottenibili da queste mediante somme prodotti, quozienti e composizioni risultano continue in ogni x in cui sono definite.
Sono per esempio continue le funzioni:

- *$f(x) = \ln(\cos(x))$ in tutte le x per le quali $\cos(x) > 0$, cioè le x in $]-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi[$, al variare di k in $\mathbb{Z}$.*
- *$f(x_1, x_2) = \sin(x_1 + x_2)\ln(x_1 x_2)$ per le (x_1, x_2) con $x_1 x_2 > 0$ (cioè con (x_1, x_2) interno al primo o al terzo quadrante.*
- *$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \left(2^{\sqrt{x_1+x_2}}, 3^{\sqrt{x_1-x_2}}\right)$ (a valori nel piano) per le (x_1, x_2) tali che $x_1 + x_2 \geq 0$ e (contemporaneamente) $x_1 - x_2 \geq 0$ (e cioè per le (x_1, x_2) tali che $x_2 \geq |x_1|$).*

I prossimi teoremi riguardano le proprietà delle funzioni continue su un intervallo.

Teorema 8.7 (teorema degli zeri). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (oppure il contrario). Allora esiste un punto x in $]a, b[$ tale che $f(x) = 0$*

Dimostrazione. Usiamo di nuovo il metodo di bisezione.
passo 0 Poniamo $\alpha_0 := a$, $\beta_0 := b$.
passo 1 Poniamo $\gamma_0 := (\alpha_0 + \beta_0)/2$. Si possono verificare tre casi:

- $f(\gamma_0) = 0$; in questo caso il teorema è dimostrato con $x = \gamma_0$.
- $f(\gamma_0) < 0$; in questo caso poniamo $\alpha_1 := \alpha_0$ e $\beta_1 := \gamma_0$.
- $f(\gamma_0) > 0$; in questo caso poniamo $\alpha_1 := \gamma_0$ e $\beta_1 := \beta_0$.

passo 2 Poniamo $\gamma_1 := (\alpha_1 + \beta_1)/2$. Si possono verificare tre casi:

- $f(\gamma_1) = 0$; in questo caso il teorema è dimostrato con $x = \gamma_1$.
- $f(\gamma_1) < 0$; in questo caso poniamo $\alpha_1 := \alpha_1$ e $\beta_2 := \gamma_1$.
- $f(\gamma_1) > 0$; in questo caso poniamo $\alpha_2 := \gamma_1$ e $\beta_2 := \beta_1$.

Iterando si arriva al
passo k Poniamo $\gamma_{k-1} := (\alpha_{k-1} + \beta_{k-1})/2$. Si possono verificare tre casi:

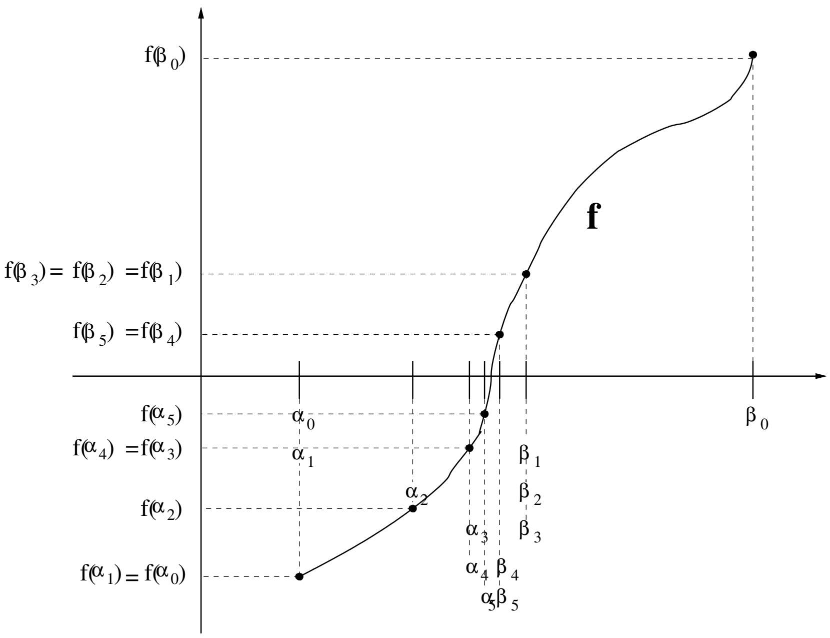
- $f(\gamma_{k-1}) = 0$; in questo caso il teorema è dimostrato con $x = \gamma_{k-1}$.
- $f(\gamma_{k-1}) < 0$; in questo caso poniamo $\alpha_k := \alpha_{k-1}$ e $\beta_k := \gamma_{k-1}$.
- $f(\gamma_{k-1}) > 0$; in questo caso poniamo $\alpha_k := \gamma_{k-1}$ e $\beta_k := \beta_{k-1}$.

E si continua così. In questo modo o in un numero finito di passi si trova un punto in cui f vale zero oppure si costruiscono due successioni (α_k) e $(\beta)_k$ tali che, per ogni intero k:

$$f(\alpha_k) < 0, f(\beta_k) > 0, \quad a \le \alpha_{k-1} \le \alpha_k < \beta_k \le \beta_{k-1} \le b, \quad \beta_k - \alpha_k = \frac{b-a}{2^k}$$

Allora, essendo le due successioni monotone e limitate, $\alpha_k \to \alpha$, $\beta_k \to \beta$ per α, β in $[a, b]$. Dato che

$$\beta - \alpha = \lim_{k \to +\infty} \beta_k - \alpha_k = \lim_{k \to +\infty} \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^k} = 0$$



si deduce $\beta = \alpha$. Chiamiamo x il valore comune di α e β. Allora, per la continuità di f

$$f(x) = f(\alpha) = \lim_{k\to\infty} f(\alpha_k) \leq 0 \qquad \text{perché } f(\alpha_k) < 0$$
$$f(x) = f(\beta) = \lim_{k\to\infty} f(\beta_k) \geq 0 \qquad \text{perché } f(\beta_k) > 0$$

da cui si ottiene $f(x) = 0$. $\square$

Conseguenza 8.8 (teorema dei valori intermedi). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f* assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$. *Ciò significa che:*

$$\forall y \textit{ compreso tra } f(a) \textit{ ed } f(b)\ \exists\, x \textit{ in } [a, b] : f(x) = y$$

Dimostrazione. Dato y come sopra possiamo considerare la funzione (translata) $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) := f(x) - y$. Per l'ipotesi fatta $g(a)$ e $g(b)$ hanno segno discorde. Dunque per il teorema degli zeri esiste un punto in cui $g(x) = 0$. Ciò significa che $f(x) = y$ che è ciò che si voleva dimostrare. $\square$

Conseguenza 8.9. *Se $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua su A allora f manda intervalli in intervalli, cioè per ogni intervallo $I \subset A$ si ha che $f(I)$ è un intervallo.*

Dimostrazione. Il fatto che sta alla base di questo enunciato ìl seguente:

$$I \subset \mathbb{R} \text{ è un intervallo se e solo se:} \quad x', x'' \in I, x' < x < x'' \ \Rightarrow\ x \in I$$

Quindi per dimostrare che $J := f(I)$ è un intervallo, bisogna mostrare che se $y', y'' \in f(I)$ e se $y' < y < y''$ allora $y \in f(I)$. Ma dire $y' \in f(I)$ significa che $y' = f(x')$ per un opportuno x' in I e analogamente $y'' = f(x'')$ per x'' in I. Per il teorema dei valori intermedi esiste x in I per cui $y = f(x)$ e questo è come dire $y \in f(I)$. Quindi $f(I)$ è un intervallo. $\square$

Teorema 8.10 (continuità dell'inversa 1). *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva su I. Allora:*

1. *f è strettamente monotona;*
2. *$J := f(I)$ è un intervallo;*
3. *la funzione inversa f^{-1}, che risulta definita da J in I è strettamente monotona e continua su J.*

Dimostrazione. Dimostiamo la monotonia. Se f non fosse né crescente né decrescente si troverebbero tre punti in fila $x_1 < x_2 < x_3$ in I tali che

$$f(x_2) < f(x_1), f(x_2) < f(x_3) \qquad \text{oppure} \qquad f(x_2) < f(x_1), f(x_2) < f(x_3)$$

supponiamo che valga la prima delle due. Possiamo ora prendere y con $f(x_2) < y \leq \min\{f(x_1), f(x_3)\}$. Per il teorema dei valori intermedi esiste x' in $[x_1, x_2[$ tale che $f(x') = y$ e un altro punto x'' in $]x_2, x_3]$ tale che $f(x'') = y$. Questo contraddice il fatto che f sia iniettiva, dato che $x' \neq x''$ mentre $f(x') = f(x'')$.
Quindi f è strettamente monotona: supponiamo per esempio che sia strettamente crescente.
Il fatto che J sia un intervallo è già stato detto (per la sola continuità di f) ed è anche facile mostrare che f^{-1} è strettamente crescente (decrescente se f fosse decrescente). Dimostriamo che f^{-1} è continua in un generico punto y_0 di J. Se y_0 non è l'estremo destro di J si ha

$$f^{-1}(y_0) = \lim_{x \to f^{-1}(y_0)^+} x = \lim_{x \to f^{-1}(y_0)^+} f^{-1}(f(x)) = (*) \lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y)$$

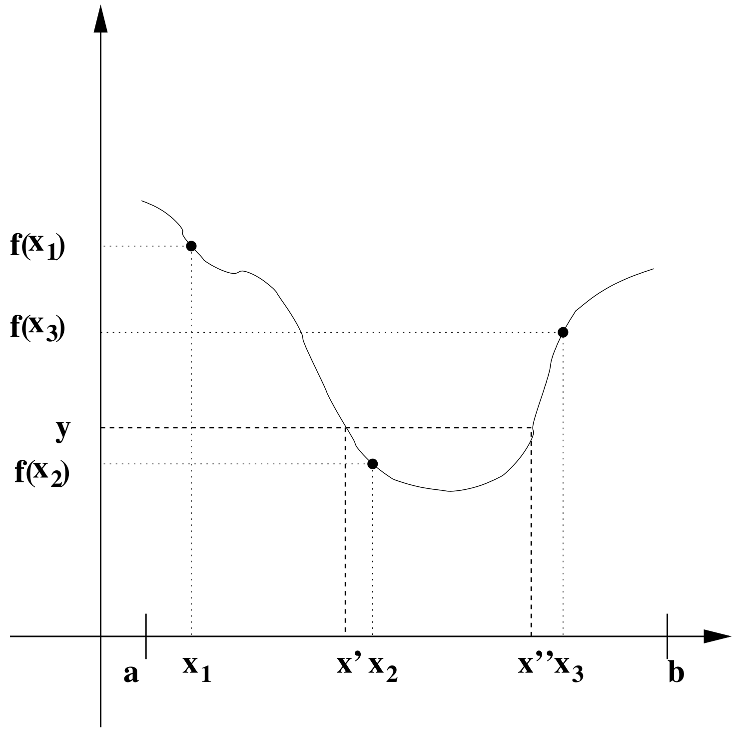
Il passaggio $(*)$ è conseguenza del teorema di cambio di variabile ed è lecito perché, essendo f continua

$$\lim_{x \to f^{-1}(y_0)^+} f(x) = f(f^{-1}(y_0)) = y_0,$$

e perché $\lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y)$ esiste (per la monotonia di f^{-1}). Nello stesso modo si dimostra che, se y_0 non è l'estremo sinistro di J

$$f^{-1}(y_0) = \lim_{x \to f^{-1}(y_0)^-} x = \lim_{x \to f^{-1}(y_0)^+} f^{-1}(f(x)) = \lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y)$$

e dunque $\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$. cioè f^{-1} è continua in y_0. $\square$



Problema 8.11. *Supponiamo che $A \subset \mathbb{R}^N$ e che $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}^M$ sia iniettiva. Allora risulta definita $\mathbf{f}^{-1} : \mathbf{f}(A) \to A$. Ci si può chiedere se*

$$\mathbf{f} \text{ continua } \Rightarrow \mathbf{f}^{-1} \text{ continua } \quad ?$$

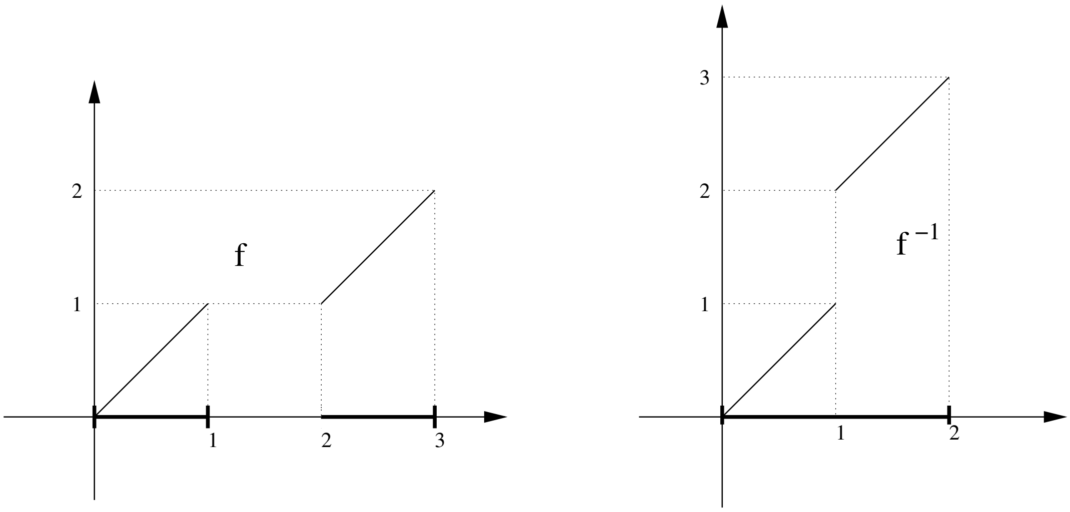
La risposta è IN GENERALE, NO. Una risposta leggeremente più precisa è "dipende dalla forma di A". Come abbiamo già visto se A è un intevallo e f ha valori reali la risposta è sì. Vediamo ora due esempi che mostrano che $\mathbf{f}^{-1}$ può non essere continua.

Esempio 8.12. *Il primo esempio si situa tra le funzioni di una variabile. Consideriamo A in $\mathbb{R}$ definito da $A := [1, 2] \cup]2, 3]$ e $f : A \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) := \begin{cases} x & se\ x \in [0, 1] \\ x - 1 & se\ x \in]2, 3] \end{cases}$$

Non è difficile verificare che f è continua e iniettiva. Ciò nonostante la funzione f^{-1}, che è definita da $B := f(A) = [0, 2]$ in A è discontinua nel punto 1; ciò si vede osservando che

$$f^{-1}(x) := \begin{cases} x & se\ x \in [0, 1] \\ x + 1 & se\ x \in]1, 2] \end{cases}$$



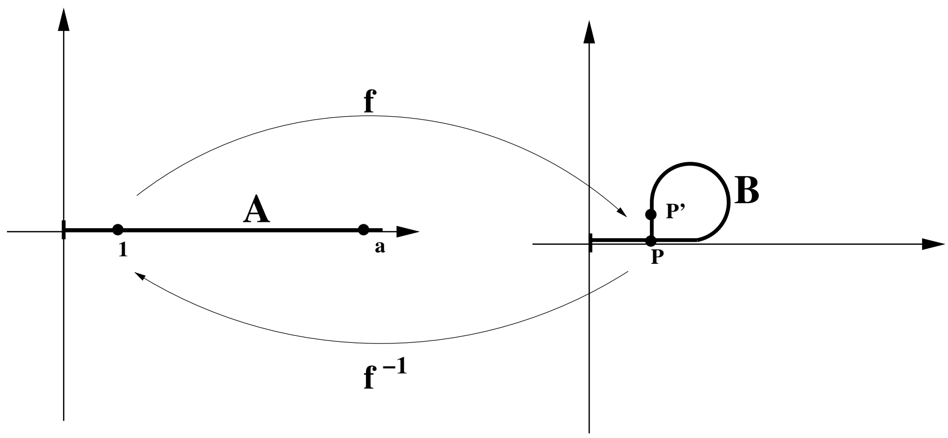
Il problema in questo caso è che A "è fatto di due pezzi". Nel teorema sulla continuità dell'inversa (8.10) *si esclude proprio che A possa essere fatto come sopra.*

Esempio 8.13. *In più variabili anche l'ipotesi che A sia "tutto di un pezzo"non basta. Consideriamo $A \subset \mathbb{R}^2$ definito da $A := \{(x, 0) : x \in [0, a[\}$ e definiamo una funzione $\mathbf{f}$ che mandi A nell'insieme B disegnato nella figura, "arrotolando"A su B in modo che, se ci fosse l'estremo $(a, 0)$ questo verrebbe mandato nello stesso punto $\mathbf{P}$ in cui viene mandato $(1, 0)$. È chiaro che una tale funzione è continua (anche se per dimostrarlo bisognerebbe precisare tutti i dettagli mancanti) e (visto che A non contiene $(a, 0)$) che tale funzione è iniettiva. Però la funzione inversa $\mathbf{f}^{-1}$ non è continua nel punto $\mathbf{P} := \mathbf{f}(1, 0)$ dato che i punti $\mathbf{P}'$ nella figura sono vicini a $\mathbf{P}$ mentre gli $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{P}')$ sono lontani da $(1, 0) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{P})$ dato che si avvicinano a $(a, 0)$.*

Nel caso di funzioni di più variabili il problema della continuità della funzione inversa è dunque assai più complesso rispetto al caso unidimensionale. Un caso che si risolve con relativa semplicità è il seguente. Si puønotare che nessuno dei due controesempi sopra verifica (ovviamente) l'ipotesi scritta sotto, in quanto nessuno degli A condiserati è chiuso.

Teorema 8.14 (continuità dell'inversa 2). *Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme limitato e chiuso. Sia $f : A \to \mathbb{R}^N$ una funzione continua e iniettiva su A. Allora la funzione inversa $f^{-1} : f(A) \to A$ è continua su $f(A)$.*

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. □



Teorema 8.15 (teorema di Weierstrass). *Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme limitato e chiuso. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette massimo e minimo in A, cioè esistono $\mathbf{x}_1$ (punto di minimo) e $\mathbf{x}_2$ (punto di massimo) in A tali che*

$$f(\mathbf{x}_1) \le f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}_2) \qquad \forall \mathbf{x} \in A$$

($f(\mathbf{x}_1)$ é il minimo di f mentre $f(\mathbf{x}_2)$ é il massimo di f).

Dimostrazione. Dimostriamo l'esistenza del massimo. Per questo cominciamo con il prendere

$$M := \sup_A f = \sup f(A)$$

(M esiste comunque potendo eventualmente essere $+\infty$) e dimostriamo che

$$\text{esiste una successione } (\mathbf{x}_n) \text{ in } A \text{ tale che } f(\mathbf{x}_n) \to M.$$

Infatti per la caratterizzazione dell'estremo superiore, se M è finito,

$$f(\mathbf{x}) \le M \qquad \forall \mathbf{x} \in A, \tag{3}$$

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \, \mathbf{x}' \in A : f(\mathbf{x}') > M - \epsilon. \tag{4}$$

Prendendo $\epsilon = 1/n$ e chiamando $\mathbf{x}_n$ il punto $\mathbf{x}'$ corrispondente si ha:

$$M - \frac{1}{n} < f(\mathbf{x}_n) \le M \qquad \forall n \Rightarrow f(\mathbf{x}_n) \to M$$

Se invece $M = +\infty$ abbiamo

$$\forall C \in \mathbb{R} \; \exists \, \mathbf{x}' \in A : f(\mathbf{x}') \ge C.$$

Prendendo $C = n$ e $\mathbf{x}_n$ il corrispondente $\mathbf{x}'$ si ottiene $f(\mathbf{x}_n) \to +\infty = M$. Abbiamo quindi trovato la successione $(\mathbf{x}_n)$.

A questo punto, dato che A è limitato, la successione $(\mathbf{x}_n)$ è limitata e per il teorema di Bolzano-Weierstrass esistono un punto $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^N$ ed una estratta $(\mathbf{x}_{\sigma_n})$ di $(\mathbf{x}_n)$ tali che $\mathbf{x}_{\sigma_n} \to \mathbf{x}$. Dato che A è chiuso il punto $\mathbf{x}$ appartiene ad A. Dato che f è continua in $\mathbf{x}$ e che $\mathbf{x}_{\sigma_n} \to \mathbf{x}$ si ha $f(\mathbf{x}_{\sigma_n}) \to f(\mathbf{x})$.

D'altra parte $(f(x_{\sigma_n}))$ é un'estratta dalla successione $(f(\mathbf{x}_n))$ che convergeva a M e quindi si ha anche $f(\mathbf{x}_{\sigma_n}) \to M$.

Dato che il limite è unico non può essere altro che $f(\mathbf{x}) = M$ e cioè $f(\mathbf{x})$ è il massimo. $\square$

Conseguenza 8.16. *In particolare si può considerare $A = [a, b]$, con $a < b$ numeri reali. In questo caso il teorema dei valori intermedi si può anche formulare dicendo che, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua*

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ f assume tutti i valori tra il massimo e il minimo.

Un altro conseguenza (equivalente) è di dire che se f è una funzione continua (reale di variabile reale) allora

$$I \text{ intervallo chiuso e limitato } \Rightarrow f(I) \text{ intervallo chiuso e limitato}$$

Notiamo che in generale gli estremi di $f([a, b])$ non hanno nulla a che vedere con $f(a)$ o $f(b)$. Infatti

$$f([a,b]) = \left[\min_{a \le x \le b} f(x), \max_{a \le x \le b} f(x)\right].$$

Esempio 8.17. *Vediamo che l'immagine di un intervallo aperto tramite una funzione continua può essere un intervallo chiuso: se $f(x) := \sin(x)$, allora $f(]0, 2\pi[) = [-1, 1]$.*

Vediamo che l'immagine di un intervallo limitato tramite una funzione continua può essere un intervallo illimitato: se $f(x) := 1/x$, allora $f(]0, 1[) =]1, +\infty[$. In altri termini una funzione continua su un limitato non è necessariamente limitata. (a meno che l'insieme di partenza non sia anche chiuso)

È chiaro che se l'insieme di partenza non é limitato, una funzione continua non è, in generale, limitata (se $f(x) := x$, allora $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$ - si noti che $[0, \infty[$ è chiuso in $\mathbb{R}$!). Peraltro si vede che, anche qualora f fosse limitata, non si puó dire che f ha massimo o minimo. Per esempio se $f(x) := \arctan(x)$ allora $f([0, +\infty[) = [0, \pi/2[$ che è limitato, ma non chiuso (quindi f è limitata, ma non ha massimo).