12. Tabella di derivate notevoli

Funzione f (x)	**Derivata** f '(x)
c	0
x	1
$\| x \|$	$\mathrm{sgn}\ x \quad (x \neq 0)$
$\mathrm{sgn}\ x$	$0 \quad (x \neq 0)$
x^{α}	$\alpha\ x^{\alpha - 1}$
a^{x}	$a^{x} \log a$
e^{x}	e^{x}
$\log_a x$	$1 / (x \log a)$
$\log x$	$1 / x$
$\mathrm{sen}\ x$	$\cos x$

cos x	**- sen x**
tg x	$1 + tg^2 x = 1 / \cos^2 x$
arcsen x	$1/\sqrt{1-x^2}$
arccos x	$-1/\sqrt{1-x^2}$
arctg x	$1 / (1 + x^2)$
x^x	$x^x (\log x + 1)$

Alcune verifiche

f (x) = sen x

$$\frac{\mathrm{sen}\,(x_0 + h) - \mathrm{sen}\,x_0}{h} = \frac{\mathrm{sen}\,x_0 \cosh + \cos x_0\,\mathrm{senh} - \mathrm{sen}x_0}{h} \to \cos x_0$$

In maniera analoga si procede per calcolare la derivata di cosx e di tgx (vedremo più avanti due procedimenti alternativi)

f (x) = e^x

$$\frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0}\,\frac{e^h - 1}{h} \to e^{x_0}$$

f (x) = $\log x$

$$\frac{\log(x_0 + h) - \log x_0}{h} = \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{h} \to \frac{1}{x_0}$$

Regole di derivazione

Funzione	Derivata
$(f+g)'(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$(c f)'(x)$	$c\ f'(x)$
$(f g)'(x)$	$f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$
$(1/f)'(x)$	$-f'(x)/f^2(x)$
$(f/g)'(x)$	$\{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)\}/\ g^2(x)$
$(f \circ g)'(x)$	$f'(g(x))\ g'(x)$
$(f^{-1})'(x)$	$1/\ f'(f^{-1}(x))$

<u>Osservazione</u>

Le prime due proprietà si possono riformulare con linguaggio algebrico, dicendo che l'insieme delle funzioni derivabili in un punto x_9 forma **uno spazio vettoriale** e che l'applicazione che ad una funzione associa la sua derivata è **lineare**.

Alcune verifiche

prodotto

Se f (x) e g (x) sono funzioni derivabili in x_0, anche il loro prodotto lo è e risulta $(f\ g)'(x_0) = f'(x_0)\ g (x_0) + f (x_0)\ g'(x_0)$.

Il risultato si può generalizzare al prodotto di un numero finito di funzioni derivabili in uno stesso punto; ad esempio, se f (x) , g (x) e h (x) sono tre funzioni derivabili in x_0, anche la funzione prodotto fgh (x) lo è e la sua derivata vale

$f'(x_0)\, g (x_0)\, h (x_0) + f (x_0)\, g'(x_0)\, h (x_0) + f (x_0)\, g (x_0)\, h'(x_0)$.

dimostrazione

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\, g(x) + f(x_0)\, \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \rightarrow$$

$$\rightarrow f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

☑

Per quanto riguarda il prodotto di tre funzioni, si ha:

$$D [(f g) h] = (f g)' h + (f g) h' = f' g h + f g' h + f g h'.$$

Il procedimento si estende al prodotto di un numero arbitrario (ma finito) di funzioni. Non sarebbe difficile scrivere una formulazione rigorosa, utilizzando il principio di induzione.

reciproca

Se $f(x)$ é derivabile in x_0 e se $f(x_0) \neq 0$, anche la funzione reciproca lo è e risulta: $\mathbf{(1/f)'(x) = -f'(x)/f^2(x)}$

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{f(x) f(x_0)} \rightarrow -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

rapporto

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in x_0 e se $g(x_0) \neq 0$, anche il loro rapporto lo è e risulta:

$$(f/g)'(x_0) = [f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)] / g^2(x_0).$$

Basta scrivere il rapporto f/g come prodotto tra f e 1/g ed applicare le regole di derivazione del prodotto e della reciproca:

$$f'(1/g) + f(1/g)' = \frac{f'}{g} + f\frac{-g'}{g^2} = \frac{f'g - f g'}{g^2}$$

☑

funzione composta

Se $g(x)$ è derivabile in x_0 e se $f(t)$ è derivabile in $t_0 = g(x_0)$, la funzione composta $f(g(x))$ è derivabile in x_0 e risulta:

$$D(f \circ g)(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0).$$

Il risultato si estende in modo immediato al caso di tre o più funzioni componenti.

Ad esempio, sotto le opportune ipotesi, la derivata della funzione composta $(f \circ g \circ h)(x)$ è data da $f'(g(h(x)))\, g'(h(x))\, h'(x)$.

<u>Osservazione</u>

Il teorema fornisce una condizione **sufficiente** a garantire l'esistenza della derivata di una funzione composta; questa condizione non è necessaria, come è provata dal seguente esempio.

La funzione $F(x) = \cos(x^{2/3})$ è composta dalle funzioni $g(x) = x^{2/3}$ e $f(t) = \cos t$.

Il teorema di cui ci stiamo occupando garantisce l'esistenza di $F'(0)$ sotto l'ipotesi che g sia derivabile in 0 ed f in $g(0) = 0$.

Nel caso in esame $g'(0)$ non esiste (la funzione è una potenza con esponente minore di 1).

Dunque per stabilire l'esistenza di $F'(0)$ non possiamo ricorrere al teorema, ma dobbiamo utilizzare la definizione: questa fornisce

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^{2/3})-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^{4/3}/2}{x}=0.$$

La dimostrazione che segue non ha carattere generale, ma vale <u>solo</u> sotto l'ulteriore ipotesi che risulti localmente $g(x)\neq g(x_0)$, per $x\neq x_0$.

$$\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

L'ipotesi aggiuntiva è stata utilizzata per dividere per $g(x)-g(x_0)$.

Passando al limite per $x\to x_0$, il secondo fattore tende a $g'(x_0)$; con il cambiamento di variabile $y=g(x)$ il primo fattore fornisce:

$$\lim_{y\to g(x_0)}\frac{f(y)-f(g(x_0))}{y-g(x_0)}=f'(g(x_0)).$$

☑

La dimostrazione nel caso generale fa uso della formula del differenziale .

Essendo $f(y)$ derivabile (e quindi differenziabile) nel punto $y_0=g(x_0)$, possiamo scrivere:

$$f(y)-f(y_0)=f'(y_0)(y-y_0)+(y-y_0)\,\varepsilon(y)$$

con $\varepsilon(y)\to 0$ per $y\to y_0$

Osserviamo che $\varepsilon(y)$ si può prolungare per continuità in y_0 con valore nullo.

Nella precedente uguaglianza poniamo $y = g(x)$, $y_0 = g(x_0)$:

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) =$$

$$= f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + (g(x) - g(x_0))\,\varepsilon(g(x))$$

Dividiamo per $x - x_0$ (lo possiamo fare, perché dobbiamo calcolare il limite per $x \to x_0$) :

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= f'(g(x_0))\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\,\varepsilon(g(x))$$

Passando al limite per $x \to x_0$, si ottiene l'asserto. Infatti, in particolare :

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(g(x)) = \lim_{y \to y_0} \varepsilon(y) = 0 .$$

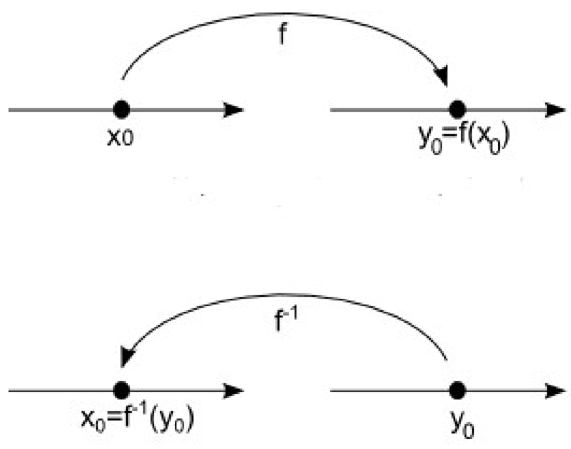
Il cambio di variabile nel calcolo del limite è giustificato dalla continuità della funzione $\varepsilon(y)$.

☑

funzione inversa

Sia $f(x)$ una funzione definita e **continua in un intervallo I** ed invertibile; se $f(x)$ è derivabile in x_0 e se risulta $f'(x_0) \neq 0$, allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha

$$(f^{-1})'(y_0) = 1 / f'(x_0).$$



Esercizio

Tenendo conto della simmetria che lega il grafico di una funzione a quello dell'inversa , spiegare perché deve essere $f'(x_0) \neq 0$ affinché esista la derivata dell'inversa.

Verifica della regola di derivazione.

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

Si pone $y = f(x)$ ovvero $x = f^{-1}(y)$.

Le ipotesi che abbiamo fatto garantiscono che f^{-1} è continua (teorema sull'inversa di una funzione continua in un intervallo) e quindi il cambio di variabile è lecito.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Osservare che essendo f invertibile, $f(x) \neq f(x_0)$ per $x \neq x_0$ e dunque il rapporto scritto ha senso.

Osservazione

Il calcolo fatto prova l'esistenza della derivata per la funzione inversa e il suo valore. Il solo calcolo della derivata può essere ricavato come segue : poiché $f(f^{-1}(x)) = x$, derivando membro a membro si ottiene $f'(f^{-1}(x))\, Df^{-1}(x) = 1$ e dunque $Df^{-1}(x) = 1 / f'(f^{-1}(x))$.

Ad esempio, sapendo che $D\,x^2 = 2x$, la derivata di $\sqrt{x}$ si può dedurre come segue : $(\sqrt{x})^2 = x \Rightarrow 2\sqrt{x}\; D\sqrt{x} = 1 \Rightarrow D\sqrt{x} = 1/(2\sqrt{x})$.

Analogamente, conoscendo la derivata di e^x, deduciamo quella di logx.

$e^{\log x} = x \Rightarrow e^{\log x}\, D\log x = 1 \Rightarrow D\log x = 1/x.$

☑

Applicazioni al calcolo di alcune derivate notevoli

- **$f(x) = \cos x$**

Poiché abbiamo già calcolato la derivata della funzione seno, scritta la funzione nella forma sen $(x + \pi/2)$ e applicando la regola di derivazione di una funzione composta, si ha:

$D\cos x = [(D\,\mathrm{sen})(x + \pi/2)]\; D(x + \pi/2) = \cos(x + \pi/2) = -\,\mathrm{sen}\, x.$

- **$f(x) = tg\, x$**

Scritta la funzione nella forma sen x / cos x , possiamo applicare la regola di derivazione di un rapporto, ottenendo:

$$D\, tg\, x = [\ (D\, sen\, x) \cos x\ - sen\, x\ (D \cos x)\ ] / \cos^2 x =$$

$$= (\cos^2 x + sen^2 x) / \cos^2 x = 1 / \cos^2 x .$$

Osservare che la derivata può essere riscritta nella forma $1 + tg^2x$.

- **$f(x) = a^x$**

$$a^x = e^{x \log a} \quad \ldots\ldots$$

- **$f(x) = \log_a x$**

$$\mathbf{\log_a x} = \frac{\log x}{\log a} \quad \ldots\ldots$$

- **$f(x) = arcsen\, x$**

$$D\, arcsen\, x = \frac{1}{(\ D\, sen\, t\ )_{\ t\ =\ arcsen\ x}} = \frac{1}{(\cos t\ )_{\ t\ =\ arcsen\ x}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\, t}\;\right)_{t\ =\ \mathrm{arcsen}\, x}} = \frac{1}{\sqrt{1\ -\ x^2}}$$

Ricordiamo che arcsen x $\in [\,-\pi / 2,\ \ \pi / 2\,]$ e dunque cos (arcsen x) ≥ 0; questo spiega perché abbiamo scritto cos t $= \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\, t}$, scegliendo cioè il segno positivo davanti alla radice.

Osserviamo che per $x = \pm 1$ il risultato non ha senso.

In effetti in questi due punti la derivata non esiste (sono punti a tangente verticale); ad esempio, per il punto $x = 1$ si ha :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\mathrm{arcsen}\, x - \pi / 2}{x - 1} \underset{\mathrm{arcsen}\, x - \pi / 2 = t}{=} \lim_{t \to 0^-} \frac{t}{\cos t - 1} =$$

$$= \lim_{t \to 0^-} \frac{t}{-t^2 / 2} = +\infty$$

Allo stesso modo si prova che non esiste la derivata per $x = -1$.

Dunque l'uguaglianza che abbiamo stabilito fornisce la derivata della funzione arcoseno in tutti i punti in cui esiste.

- **f (x) = arccos x**

$$\mathrm{D}\, \arccos x = \frac{1}{(\ \mathrm{D} \cos t\,)_{\ t\ =\ \arccos x}} = \frac{1}{(\,-\,\mathrm{sen}\, t\,)_{\ t\ =\ \arccos x}} =$$

$$= \frac{1}{\left(-\sqrt{1 - \cos^2 t} \right)_{t = \arccos x}} = - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ricordiamo che arccos x $\in [0, \pi]$ e dunque sen (arccos x) ≥ 0; questo spiega perché abbiamo scritto sen t $= \sqrt{1 - \cos^2 t}$, scegliendo cioè il segno positivo davanti alla radice.

Anche la funzione arcocoseno non è derivabile per $x = \pm 1$ (che sono ancora punti a tangente verticale); verifichiamo l'affermazione per x = 1:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos x}{x - 1} \underset{\arccos x = t}{=} \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{\cos t - 1} =$$

$$= \lim_{t \to 0+} \frac{t}{-t^2/2} = -\infty$$

- **f (x) = arctg x**

$$D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{(D \operatorname{tg} t)_{t = \operatorname{arctg} x}} = \frac{1}{(1 + \operatorname{tg}^2 t)_{t = \operatorname{arctg} x}} = \frac{1}{1 + x^2}$$

- **f (x) = x $^{\alpha}$**

$$x^{\alpha} = e^{\alpha \log x} \Rightarrow D x^{\alpha} = e^{\alpha \log x} \; D(\alpha \log x) = x^{\alpha} \alpha / x = \alpha x^{\alpha - 1}$$

L'uguaglianza $D x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1}$ deve essere intesa in tutti i punti in cui ha senso.

Nei casi banali $\alpha = 0$ oppure $\alpha = 1$ il risultato trovato è coerente con il fatto che la derivata vale sempre 0 nel primo caso, sempre 1 nel secondo.

Ad esempio:

$D\, x^3 = 3\, x^2$ ha sempre senso anche per $x = 0$

$D \sqrt[3]{x} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ non ha senso per $x = 0$

$D \sqrt[3]{x^5} = \dfrac{5\sqrt[2]{x^3}}{3}$ ha sempre senso anche per $x = 0$

$D\, x^\pi = \pi\, x^{\pi - 1}$ ha senso per $x \geq 0$

In realtà il calcolo fatto richiedeva che fosse $x > 0$, mentre per certi valori di α la potenza è definita anche per $x = 0$ e per certi valori **razionali** di α anche per $x < 0$.

Eliminati i casi banali $\alpha = 0$ ed $\alpha = 1$, guardiamo cosa accade nel caso generale.

Intanto la funzione è definita in $x = 0$ con valore 0 (o comunque può essere prolungata per continuità con tale valore) solo se $\alpha > 0$. Studiamo la derivabilità in $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases} .$$

Dunque la derivata in $x_0 = 0$ esiste per potenze maggiori di 1 (oltre che nei due casi particolari).

Vogliamo adesso far vedere che la formula di derivazione (che abbiamo ottenuto solo per $x > 0$) vale anche per $x < 0$ nei casi in cui la potenza è definita anche per tali valori. Questo accade per le potenze $x^{m/n}$ con m,n primi tra loro ed n dispari (compreso il caso $n = 1$). Infatti, se n fosse pari, $\sqrt[n]{x^m}$ avrebbe senso per le x negative solo se anche m fosse pari, cosa che però deve essere esclusa perché altrimenti m ed non sarebbero primi tra loro.

Limitiamoci a vedere due esempi : il calcolo che eseguiremo si può estendere al caso generale senza difficoltà. In questo calcolo utilizzeremo :

- la formula della derivata di una potenza per le x positive
- la formula della derivata di una funzione composta
- il fatto che $\sqrt[n]{x^m}$ con n dispari è una funzione pari se m è pari, una funzione dispari se n è dispari.

Esempio 1.

$f(x) = x^4$ (n = 1 , m = 4 pari)

Sia x negativo (e dunque –x positivo) :

$$D(x)^4 = D(-x)^4 = 4(-x)^3(-1) = 4x^3$$

Esempio 2.

$f(x) = x^{1/3}$ (n = 1 , m = 3 dispari)

Sia x negativo (e dunque –x positivo) :

$$D(x)^{1/3} = -D(-x)^{1/3} = -\frac{1}{3}(-x)^{-2/3}(-1) = \frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

- **$f(x) = x^x$**

La funzione è definita dall'espressione $e^{x \log x}$ per x > 0 ; utilizzando la regola di derivazione di una funzione composta, si ottiene

$$e^{x \log x} D(x \log x) = x^x(\log x + 1).$$

La funzione si può prolungare per continuità in x = 0 con valore 1 , ma la funzione così prolungata non è derivabile (punto a tangente verticale).

Allo stesso modo si derivano le funzioni della forma $f(x)^{g(x)}$; dopo averle scritte nella forma $e^{g(x)\ \log f(x)}$, applicando la regola di derivazione di una funzione composta, si trova

$$f(x)^{g(x)} \left\{ g'(x) \log f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)} \right\}.$$

Osservazione

Abbiamo visto alcuni esempi di funzioni elementari, continue nel loro campo di esistenza, che presentano punti di non derivabilità:

x^{α}	non è derivabile in $x = 0$ per $\alpha < 1$ $(\alpha \neq 0)$
$\lvert x \rvert$	non è derivabile in $x = 0$
arcsen x, arccos x	non sono derivabili in $x = \pm 1$.

Per quanto riguarda le funzioni definite con più leggi, ad esempio della forma:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{per } x \in A_1 \\ f_2(x) & \text{per } x \in A_2 \end{cases}$$

con $f_1(x)$, $f_2(x)$ derivabili nel dominio in cui sono state definite, si può perdere non solo la derivabilità, ma anche la continuità nei punti in cui le leggi si raccordano.

Ad esempio:

- $f(x) = \begin{cases} \text{senx} & \text{se } x \geq 0 \\ e^x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = 1$;

- $f(x) = \begin{cases} \text{senx} & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - \text{cosx} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

è continua in $x_0 = 0$, ma non derivabile (punto angoloso)

- $f(x) = \begin{cases} \text{senx} & \text{se } x \geq 0 \\ \text{cosx} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

non è continua in $x_0 = 0$ (discontinuità di I specie ovvero di salto finito)

Fino alla metà dell'Ottocento si riteneva che ogni funzione continua fosse derivabile, tranne che in alcuni punti isolati; solo in un secondo tempo sono state trovate funzioni (non elementari) continue in tutti i punti di un intervallo ma derivabili in nessun punto (ad esempio la funzione di Weierstrass).

Alcuni esercizi di riepilogo

Calcoliamo derivata prima e seconda delle seguenti funzioni:

- $\log |x|$

$$\frac{1}{x} \quad ; \quad -\frac{1}{x^2}$$

- $|\log x|$

$$\frac{\operatorname{sgn} \log x}{x} = \begin{cases} 1/x & \text{per } x > 1 \\ -1/x & \text{per } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$-\frac{\operatorname{sgn} \log x}{x^2} = \begin{cases} -1/x^2 & \text{per } x > 1 \\ 1/x^2 & \text{per } 0 < x < 1 \end{cases}$$

- log sen 3 x

$$\frac{3}{\operatorname{tg} 3x} \quad ; \quad -\frac{9}{\operatorname{sen}^2 3x}$$

.

Calcolare la d erivata delle seguenti funzioni

- x^2 sen x e^x

2 x (sen x e^x) + (cos x) x^2 e^x + (x^2 sen x) e^x.

- $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left\{ \log\,(1 + 1/x) - \frac{1}{x+1} \right\}$$

La funzione f (x) ha in x = 0 una discontinuità eliminabile:

$$\lim_{x \to 0} x \log\left(1+1/x\right) = \lim_{x \to 0} [\, x \log(1+x) - x \log x \,] = 0$$

e dunque f (x) $\to$ 1.

Prolunghiamo per continuità la funzione, definendo f (0) = 1; vogliamo vedere se il prolungamento ha reso la funzione derivabile nel punto, oltre che continua:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x \log\left(1+1/x\right)} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \log(1+1/x)}{x} = +\infty$$

Dunque la derivata non esiste in x = 0, che è un punto a tangente verticale.

- $\sqrt{\left|x^2 - 1\right|}$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left|x^2-1\right|}} \operatorname{sgn}(x^2-1)\,(2x) = \frac{x \operatorname{sgn}(x^2-1)}{\sqrt{\left|x^2-1\right|}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} & \text{per} \left| x \right| > 1 \\ \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{per} \left| x \right| < 1 \end{cases}$$

La derivata non esiste in x = ± 1, che sono due cuspidi. Verifichiamo l'affermazione per x = 1: dato che la funzione è pari, lo stesso risultato vale per x = - 1.

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x - 1} = \lim_{x \to 1^{\pm}} \operatorname{sgn}(x - 1) \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{|x - 1|}} = \pm\infty$$

La derivata seconda è invece data da:

$$\frac{\operatorname{sgn}(x^2 - 1)\sqrt{|x^2 - 1|} - \dfrac{x^2}{\sqrt{|x^2 - 1|}}}{|x^2 - 1|} =$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}(x^2 - 1)\,|x^2 - 1| - x^2}{|x^2 - 1|^{3/2}} = - \frac{1}{|x^2 - 1|^{3/2}}.$$

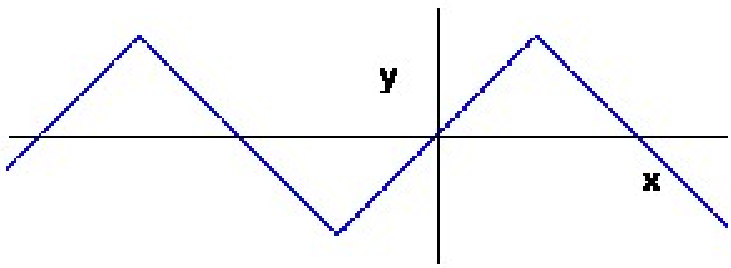
- arcsen sen x

$$\frac{\cos x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|} = \operatorname{sgn} \cos x$$

Attenzione : arcsen senx ≠ x. L'uguaglianza vale nell'intervallo [-π/2 , π/2] dove la funzione seno si inverte; ma la funzione è definita su tutta la retta. Poiché la funzione è 2π-periodica, basta studiarla in un intervallo di ampiezza il periodo, ad esempio in [$-\pi$, π]. Poiché la funzione è dispari, basta studiarla per le x positive e dunque in [0, π] . Poiché in [0 , $\pi/2$] vale x, rimane da studiare in [$\pi/2$, π]. In questo intervallo poniamo $x - \pi = t$, cioè $x = t + \pi$, con t che varia in [$-\pi/2$, 0]. Si ha allora

$$\arcsin \sin x = \arcsin \sin (t + \pi) = - \arcsin \sin t = - t = \pi - x.$$

Il grafico complessivo della funzione ha dunque la forma :



La derivata non esiste nei punti in cui cos x = 0, cioè per $x = \pi / 2 + k \pi$, che sono punti angolosi.

La derivata seconda vale 0 in tutti i punti in cui esiste, cioè per $x \neq \pi / 2 + k \pi$. Il fatto di avere derivata seconda nulla in tutti i punti di un intervallo è una caratteristica delle funzioni della forma $f (x) = a x + b$: in effetti il grafico della funzione che stiamo considerando è formato da tratti rettilinei.

NB: la funzione sen arcsenx è definita solo per x in [- 1 , 1] e vale x.

- $$f (x) = \begin{cases} \log x & \text{per } x \geq 1 \\ x^2 - 1 & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

La funzione è definita in tutto **R** ed è continua; l'unica verifica da fare è per x = 1.

Per $x \neq 1$ la funzione è derivabile e risulta

$$f'(x) = \begin{cases} 1/x & \text{per } x > 1 \\ 2x & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

Rimane da studiare il comportamento per x = 1; studiamo il limite del rapporto incrementale, separando il limite sinistro da quello destro, come abbiamo fatto nella verifica della continuità.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

Dunque la derivata non esiste per x = 1, che è un punto angoloso.

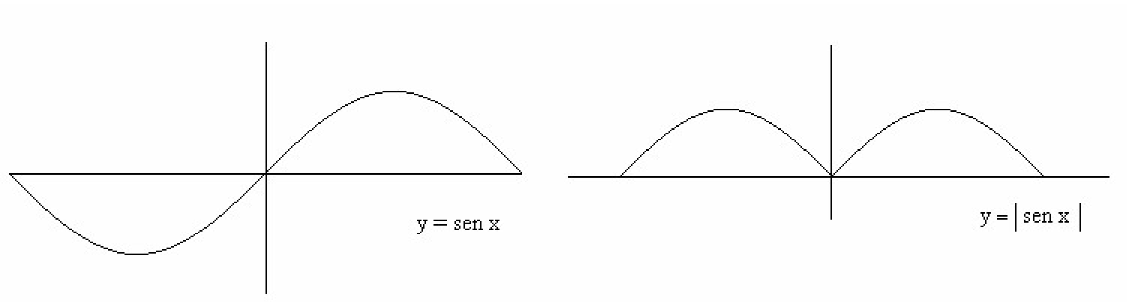
Per esercizio, provare che la funzione definita da

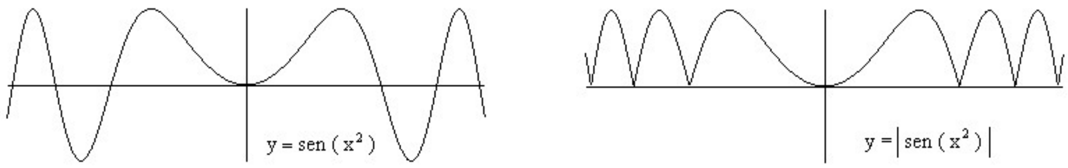
$$f(x) = \begin{cases} \log x & \text{per } x \geq 1 \\ x - 1 & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

è invece derivabile in tutto **R**; in particolare f ' (1) = 1.

Osservazione

Nel passaggio da una funzione f (x) derivabile alla funzione | f (x) | si perde la derivabilità in corrispondenza dei punti in cui f (x) = 0 , a meno che in questi punti non sia anche f ' (x) = 0.





Se in un punto x_0 risulta $f (x_0) \neq 0$, allora localmente $| f (x) | = f (x)$ oppure $| f (x) | = - f (x)$ e dunque la funzione $| f |$ è derivabile.

Se invece $f (x_0) = 0$, la derivata della funzione $| f |$ può non esistere (come accade in $x_0 = 0$ per $f (x) = x$ oppure $f (x) = \text{sen} x$; nel passaggio al valore assoluto si forma un punto angoloso in entrambi i casi), ma può anche esistere (come accade in $x_0 = 0$ per $f (x) = x^3$) .

Infatti se $f (x_0) = f ' (x_0) = 0$ la derivata esiste e vale 0.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{x - x_0} \right| = 0$$

Da questo segue:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{|f(x)|}{x - x_0} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to x_0^-} -\frac{|f(x)|}{x - x_0} = 0$$

e quindi l'asserto.

Osservazione

Sia f (x) una funzione invertibile in un intervallo I; abbiamo visto che se f è derivabile in un punto x e se risulta $f'(x) \neq 0$, allora la funzione inversa è derivabile nel punto $y = f(x)$ e risulta $(D f^{-1})(y) = 1 / f'(x)$, ovvero :

$$D f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Supponiamo adesso che f sia derivabile due volte. Applicando le regole di derivazione di un rapporto e di una composizione, si ottiene:

$$D^2 f^{-1}(x) = -\frac{D[f'(f^{-1}(x))]}{[f'(f^{-1}(x))]^2} = -\frac{f''(f^{-1}(x))\, D f^{-1}(x)}{[f'(f^{-1}(x))]^2} =$$

$$= -\frac{f''(f^{-1}(x))}{[f'(f^{-1}(x))]^3} \; .$$

Consideriamo ad esempio la funzione $f(x) = 3x + \log x$, definita per $x > 0$, che è invertibile perché crescente. Sebbene l'inversa non possa essere scritta esplicitamente in termini elementari, vogliamo calcolare $(D f^{-1})(3)$, $(D^2 f^{-1})(3)$.

Partiamo da

$$f'(x) = 3 + 1/x \quad , \quad f''(x) = -1/x^2$$

e da

$$f^{-1}(3) = 1$$

(infatti l'equazione $3x + \log x = 3$ ha come unica soluzione $x = 1$).

Sostituendo nelle espressioni sopra trovate, si ottiene:

$$D f^{-1}(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

$$D^2 f^{-1}(3) = -\frac{f''(1)}{f'(1)^3} = \frac{1}{64}.$$