Criteri di integrabilità a priori

In molti casi per stabilire se un dato integrale improprio esiste non è possibile ricorrere alla definizione, in quanto le primitive della funzione da integrare non hanno una rappresentazione elementare oppure sono difficili da calcolare; è necessario allora stabilire l'esistenza a priori, cioè senza effettuare il calcolo esplicito .

Possiamo limitarci a considerare integrali elementari; in particolare prenderemo in esame funzioni definite su un intervallo $[a , b)$, dove b può essere un numero reale in cui la funzione diventa infinita oppure $+ \infty$; per funzioni definite su un intervallo $(a , b]$, dove a può essere un numero reale oppure $- \infty$, si procede in modo analogo.

Sia dunque data una funzione $f : [a , b) \to \mathbf{R}$:

- integrabile in ogni intervallo $[a , c]$, $a < c < b$
- **di segno costante** : per fissare le idee , supporremo che sia positiva (altrimenti si cambia o di segno) e che lo sia in tutto l'intervallo (anche se in realtà basta lo sia in un intorno di b).

La funzione integrale

$$F (x) = \int_a^x f (t) \, dt$$

risulta crescente e dunque ha sicuramente limite per $x \to b$ (stessa proprietà delle successioni crescenti; anche la dimostrazione è analoga): si tratta dunque di stabilire **se questo limite è finito o no** .

Teorema - **criterio del confronto**

Siano f (x) , g (x) due funzioni che soddisfano le precedenti proprietà.

- **Se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b)$ (o almeno in un intorno di b) e se $g(x)$ è integrabile , anche $f(x)$ lo è .**
- **Se $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a, b)$ (o almeno in un intorno di b) e se $g(x)$ non è integrabile , nemmeno $f(x)$ lo è.**

dimostrazione

Nel primo caso si ha

$$\int_a^x f(t)\, dt \leq \int_a^x g(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt$$

(per la monotonia dell'integrale).

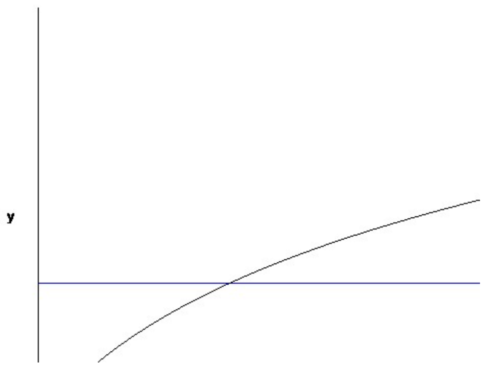
Il limite di $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ (che sappiamo esistere) è dunque necessariamente finito.

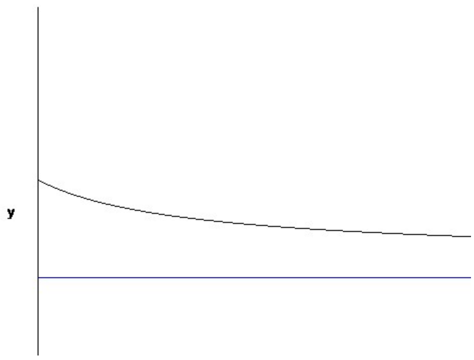
Nel secondo caso $\int_a^x f(t)\, dt \geq \int_a^x g(t)\, dt$ e poichè il limite del secondo integrale è infinito, a più forte ragione lo è quello del primo integrale.

Osservazione: una prima applicazione del criterio di confronto

Supponiamo $b = +\infty$; se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \neq 0$, sicuramente $f(x)$ non è integrabile in $[a, +\infty)$.

Infatti , dalla definizione di limite segue che è possibile trovare un numero $M > 0$ tale che $f(x) > M$ (almeno in un intorno di $+\infty$); se il limite è $+\infty$, basterà prendere per M un qualunque numero positivo; se invece L è un numero, basterà prendere per M un numero della forma $L - \varepsilon$, con ε abbastanza piccolo in modo che $L - \varepsilon$ sia positivo. Ma la funzione costante $\beta(x) = M$ (con $M \neq 0$) non è integrabile in nessun intorno di $+\infty$ e dunque nemmeno $f(x)$ lo è .





Sappiamo già che la condizione $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ non è sufficiente a garantire l'integrabilità della funzione in un intorno di $+\propto$; in realtà non è nemmeno necessaria : ad esempio, si può dimostrare che l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)\, dx$$

esiste, senza che la funzione integranda sia infinitesima per $x \to +\infty$.

Però, se <u>f (x) ha limite per x → +∞</u> , perché esista l'integrale è necessario che questo limite valga 0.

Osservazione

Se riusciamo a stabilire che :

f è minore di una funzione NON integrabile

oppure che

f è maggiore di una funzione INTEGRABILE

non possiamo trarre alcuna conclusione sull'integrabilità o meno di f.

Le funzioni comunemente usate per stabilire il confronto sono :

$$g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}} \qquad \textbf{in } [\, a , +\infty \,)$$

$$g(x) = \frac{1}{(-x)^{\alpha}} \qquad \textbf{in } (\, -\infty , b \,]$$

(sono integrabili in un intorno di $\pm\infty$ solo se $\alpha > 1$)

$$g(x) = \frac{1}{(b-x)^{\alpha}} \qquad \textbf{in } [\, a , b \,) \ , \quad b \neq +\infty$$

$$g(x) = \frac{1}{(x-a)^{\alpha}} \qquad \textbf{in } (\, a , b \,] \ , \quad a \neq -\infty$$

(sono integrabili in un intorno di b o di a solo se $\alpha < 1$).

Utilizzando queste funzioni di confronto, si ha dunque:

Se $f(x) \leq \dfrac{c}{(b-x)^{\alpha}}$ **con $\alpha < 1$, f è integrabile in [a, b) ($b \neq +\infty$)**

Se $f(x) \geq \dfrac{c}{(b-x)^{\alpha}}$ **con $\alpha \geq 1$, f non è integrabile in [a, b) ($b \neq +\infty$)**

Se $f(x) \leq \dfrac{c}{x^{\alpha}}$ **con $\alpha > 1$, f è integrabile in [a, $+\infty$)**

Se $f(x) \geq \dfrac{c}{x^{\alpha}}$ **con $\alpha \leq 1$, f non è integrabile in [a, $+\infty$).**

Alcuni esempi utili :

per $x \to +\infty$ $\log x \leq x^{\alpha}$ $\log x \geq 1$

per $x \to 0$ $|\log x| \leq 1/x^{\alpha}$ $|\log x| \geq 1$

per $x \to +\infty$ $e^{x} \geq x^{\alpha}$

per $x \to -\infty$ $e^{x} \leq 1/x^{\alpha}$

<u>Esercizi</u>

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\log x}\,dx \qquad \int_0^{1/2} \frac{1}{x\log x}\,dx \qquad \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}\,\log x}\,dx \qquad \int_0^{1/2} \frac{1}{x^2\,\log x}\,dx$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx \qquad \int_2^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^p\,(\log x)^q} \qquad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p\,(\log x)^q}$$

$p, q > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Teorema - **criterio di equivalenza**

Siano f , g : [a , b) $\rightarrow R$ integrabili in ogni intervallo [a , c] con $a < c < b$ e di segno costante (che possiamo supporre positivo).

Supponiamo che per $x \rightarrow b$ sia $f(x) \approx g(x)$; allora le due funzioni sono entrambe integrabili nell'intervallo [a , b] o nessuna delle due lo è.

Osservazione

Per $x \rightarrow b$ $f(x) \approx g(x) \Leftrightarrow \exists k \in R - \{0\} : \lim_{x\rightarrow b} f(x)/g(x) = k$ (*)

Nel caso preso in esame di funzioni positive è $k > 0$.

dimostrazione

Fissato $\varepsilon \in (0, k)$ da (*) segue che in un intorno di b si ha

$$k - \varepsilon < f(x)/g(x) < k + \varepsilon$$

ovvero

$$(k - \varepsilon)\, g(x) < f(x) < (k + \varepsilon)\, g(x).$$

L'asserto segue dal criterio del confronto.

Teorema - **criterio dell'ordine di infinitesimo o infinito**

Sia f : [a , b) → R integrabile in ogni intervallo [a , c] con a < c < b e di segno costante (che possiamo supporre positivo).

(i) Se b ∈ R , supponiamo che f (x) sia un infinito di ordine α per x → b . Allora f è integrabile se α < 1 (infinito di ordine basso), non integrabile se α ≥ 1.

(ii) Se b = +∞ , supponiamo che f (x) sia un infinitesimo di ordine α per x → +∞ . Allora f è integrabile se α > 1 (infinitesimo di ordine alto), non integrabile se α ≤ 1.

dimostrazione

Dire che f (x) è un infinito di ordine α per x → b ∈ R significa dire che esiste k ∈R - { 0 } tale che $f(x) \approx k / (b - x)^{\alpha}$; l'asserto allora segue dal criterio di equivalenza.

Allo stesso modo, dire che f (x) è un infinitesimo di ordine α per x → +∞ significa dire che esiste k ∈R - { 0 } tale che $f(x) \approx k / x^{\alpha}$; anche in questo caso il criterio di equivalenza permette di concludere.

Esercizi

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\, dx \qquad \int_1^{+\infty} \left(\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \cos x}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{\sqrt{|x^2 - 1|}}\, dx \qquad \int_0^{+\infty} x^p \left(1 - \exp(-1/\sqrt{x})\right) dx \quad (p \in \mathbf{R})$$

$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} \, dx \quad (p \in \mathbf{R})$ $\quad \int_{0}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^{p}}{\sqrt{1+x^{2p}}} \right) dx \quad (p \in \mathbf{R})$

$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{1/x}}{|x|^{p}} \, dx$

Dire se esiste finita l'area della regione di piano compresa nel semipiano delle ascisse positive tra il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^4 + 2x^2}{1 + x^3}$ e il suo asintoto all'infinito.

Dire se esiste finita l'area della regione di piano compresa tra la curva di equazione $x\,(x^2 + y^2) - 2x^2 - y^2 = 0$ e il suo asintoto.