Teoremi sui limiti

- **Unicità**
- **Restrizioni**
- **Permanenza del segno**

Se per $x \to x_0$ il limite di una funzione è diverso da 0, la funzione ha localmente lo stesso segno del limite (escluso al più nel punto x_0).

Il termine localmente significa: <u>in tutti i punti del dominio della funzione che stanno in un intorno del punto considerato.</u>

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists V(x_0) : \forall x \in A \cap V(x_0) - \{x_0\}, \ f(x) > 0.$$

Ad esempio, faremo vedere che per $x \to +\infty$ si ha $x^3 - 3x^2 - 4x - 1 \to +\infty$. Il teorema precedente assicura che la disequazione $x^3 - 3x^2 - 4x - 1 > 0$ è verificata <u>almeno</u> in un intorno di $+\infty$.

- **Passaggio al limite in una disequazione**

Se per $x \to x_0$ la funzione f (x) ha limite L e se localmente risulta f (x) > 0, allora L ≥ 0.

Alla stessa conclusione si arriva supponendo che localmente risulti f (x) ≥ 0.

$$\begin{cases} \exists\, V(x_0) : \forall x \in A \cap V - \{x_0\} \;,\; f(x) > 0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = L \end{cases} \Rightarrow L \geq 0$$

Nel caso in cui sia f (x) > 0 localmente, il limite L non è necessariamente > 0 anch'esso, potendo invece essere = 0.

Ad esempio, $f(x) = 1/x$ definita per $x > 0$; il limite per $x \to +\infty$ vale 0.

- **Confronto**

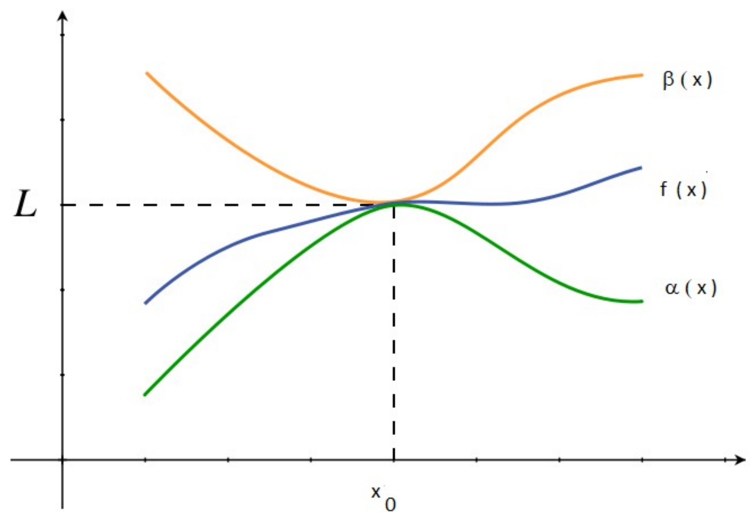
Date tre funzioni $f(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ tali che

(i) **<u>localmente</u>** $\alpha(x) \leq f(x) \leq \beta(x)$

(i i) **per $x \to x_0$ risulta $\alpha(x), \beta(x) \to L \in \mathbb{R}$;**

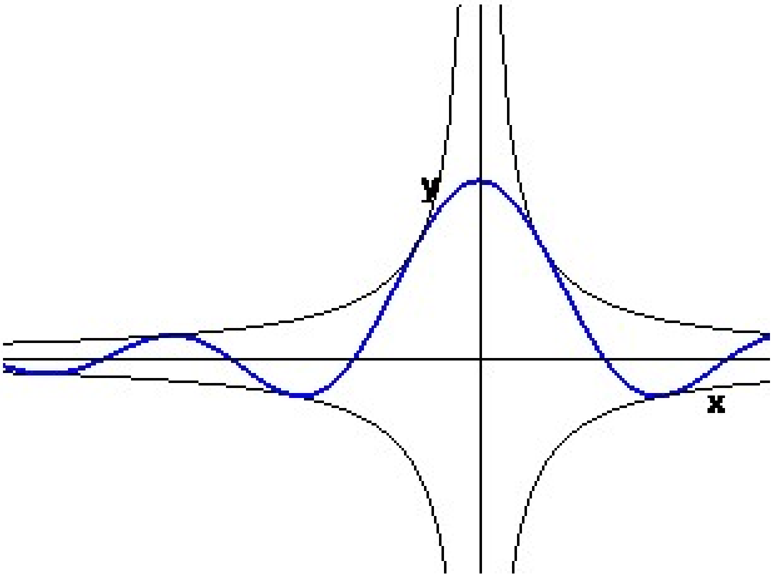
allora per $x \to x_0$ risulta anche $f(x) \to L$.

In altre parole, se nell'intorno di un punto x_0 (escluso al più il punto) riusciamo a minorare e a maggiorare la funzione f (x) con due funzioni che per $x \to x_0$ hanno lo stesso limite L, allora per $x \to x_0$ anche f (x) ha limite L.



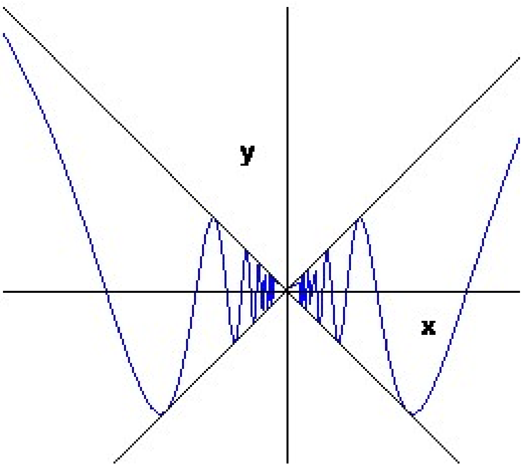
Esempio

Proviamo che $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen}x / x = 0$.



- $-1 \leq \operatorname{sen}x \leq 1 \quad (*)$
- poiché il limite è fatto per $x \to +\infty$, possiamo supporre $x > 0$
- dividendo per x i termini in (*) si ottiene $-1 / x \leq \operatorname{sen}x / x \leq 1 / x$
- poiché $\lim_{x \to +\infty} \pm 1 / x = 0$, il risultato segue per confronto.

Analogamente $\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}(1 / x) = 0$.



- $-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq 1$ (*)
- la funzione è pari: possiamo considerare solo il limite per $x \to 0^+$, supponendo dunque $x > 0$
- moltiplicando per x i termini in (*), si ottiene $-x \leq x \operatorname{sen}(1/x) \leq x$
- poiché $\lim_{x \to 0} \pm x = 0$, il risultato segue per confronto.

Osservazione

Il calcolo precedente si può generalizzare dicendo che il prodotto di una funzione infinitesima per una (localmente) limitata è infinitesimo.

Se:

(i) **per $x \to x_0$ risulta $f(x) \to 0$**

(ii) **$g(x)$ è limitata in un intorno di x_0**

allora per $x \to x_0$ risulta anche $f(x)\, g(x) \to 0$.

Osservazione

Differenza tra funzione limitata e funzione dotata di limite.

- **Confronto (II versione)**

Date due funzioni $f(x)$, $\alpha(x)$ tali che

(i) **<u>localmente</u> $f(x) \geq \alpha(x)$**

(i i) **per $x \to x_0$ risulta $\alpha(x) \to +\infty$;**

allora per $x \to x_0$ risulta anche $f(x) \to +\infty$.

Date due funzioni $f(x)$, $\beta(x)$ tali che

(i) **localmente** $f(x) \leq \beta(x)$

(i i) **per** $x \to x_0$ **risulta** $\beta(x) \to -\infty$;

allora per $x \to x_0$ **risulta anche** $f(x) \to -\infty$.

- **Limite di una funzione composta**

Cambiamento di variabile nel calcolo di limiti

Consideriamo la funzione composta $f(\varphi(x))$ e supponiamo :

(i) $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = L$

(ii) $\lim_{t \to L} f(t) = M$.

Ci chiediamo se questo garantisce che è anche

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = M$$

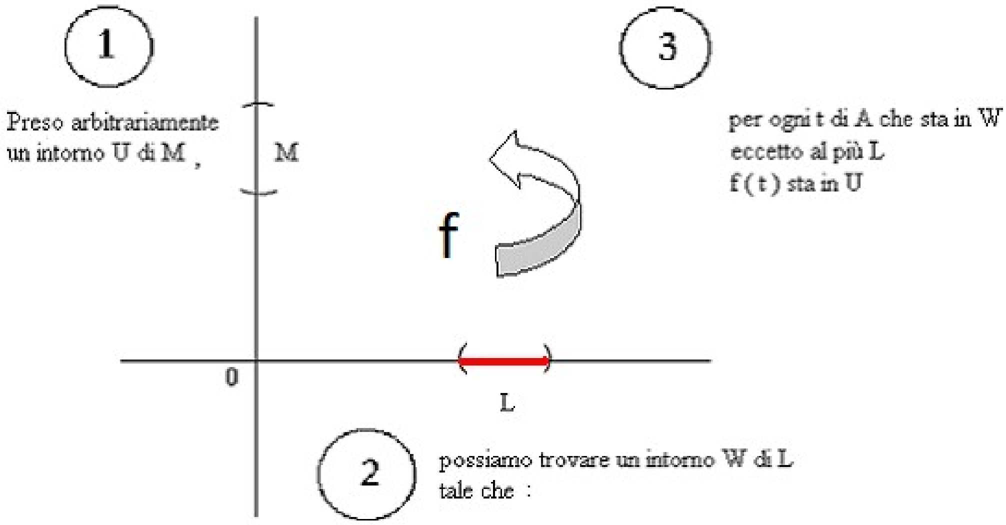
in altre parole, se il calcolo del limite di una funzione composta si possa ricondurre a quello dei limiti delle funzioni che la compongono.

Ad esempio, ci chiediamo se è vero che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}2x}{2x} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{sen}t}{t}$$

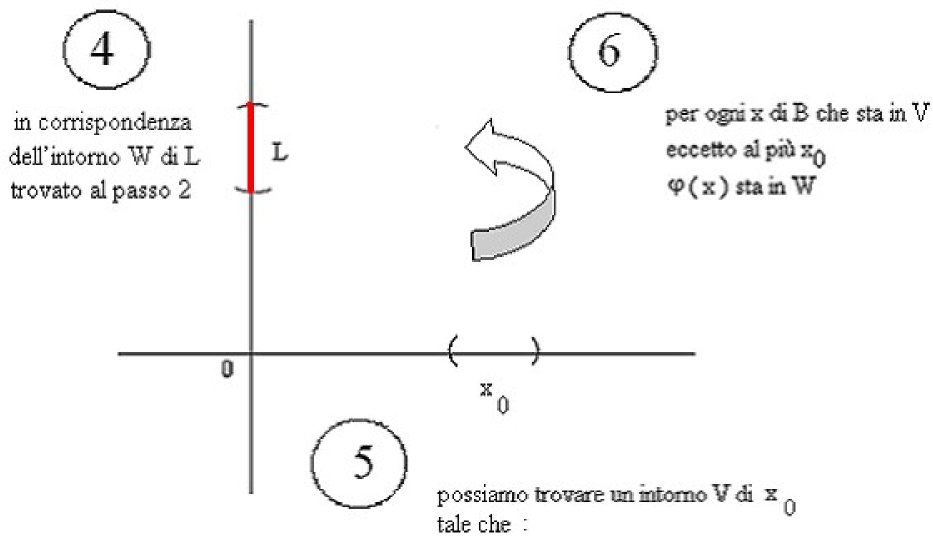
$$\lim_{x\to 0^+} x\,\mathrm{sen}\frac{1}{x} = \lim_{t\to +\infty} \frac{\mathrm{sen}t}{t}$$

Passo #1 : $\lim_{t \to L} f(t) = M$.



(Abbiamo indicato con A il dominio della funzione f)

Passo #2 : $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = L$



(Abbiamo indicato con B il dominio della funzione φ)

Riassumendo, sembrerebbe aver provato che :

$$\forall\, x \in B \cap V - \{ x_0 \} \;,\; f(\varphi(x)) \in U(M)$$

e data l'arbitrarietà dell'intorno U (M), il risultato sul limite della funzione composta sembrerebbe dimostrato.

Abbiamo detto che per le x di V (x_0) (escluso al più il punto) i valori ϕ (x) cadono in W (L) . La funzione f prende questi valori e li manda in U (M). In realtà la funzione f prende soltanto i valori ≠ L . Quindi se per qualche x in V (x_0) risulta ϕ (x) = L , non è assicurato che f (ϕ (x)) stia in U (M). Per ovviare a questa difficoltà , potremmo prendere un intorno di x_0 più piccolo di V, in modo da eliminare i punti in cui è ϕ (x) = L. Ci sono funzioni in cui questo non è possibile; sono quelle che assumono il valore L infinite volte in ogni intorno di x_0 (ad esempio, funzioni che compiono infinite oscillazioni nell'intorno del punto x_0 .

Quindi, perché valga il teorema sul limite della funzione composta come ci aspettiamo, occorre fare qualche ipotesi aggiuntiva.

Per eliminare la difficoltà sopra segnalata, basterà supporre che sia

ϕ (x) ≠ L in un intorno di x_0 , escluso al più x_0.

In alternativa possiamo intervenire sulla funzione f. Sappiamo che la funzione prende i punti di un intorno di L (escluso al più L) e li manda nell'intorno di M. Dobbiamo fare in modo che la funzione non scarti il valore L. Questo ad esempio accade se f è continua in L (e allora M = f (L)).

Quindi un'ipotesi aggiuntiva <u>alternativa</u> alla precedente è

f (x) continua in L.

Riassumendo:

(i) $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = L$

(ii) $\lim_{t \to L} f(t) = M$

e inoltre

(iii)a **$\varphi(x) \neq L$ localmente, per $x \neq x_0$**

oppure

(iii)b **$f(t)$ continua in L**

Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = M.$$

Osservazione

In particolare la composizione di funzioni continue è continua:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \\ \lim_{t \to \varphi(x_0)} f(t) = f(\varphi(x_0)) \end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0))$$

Osservazione

Consideriamo le due funzioni

$$\varphi(x)=0\ ,\ \forall x \in R \qquad\qquad f(t)=\begin{cases} 0 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

$f(\varphi(x))=1,\ \forall x$ e dunque $\lim_{x \to 0} f(\varphi(x))=1$

Però

$\lim_{x \to 0} \varphi(x)=0$, $\lim_{t \to 0} f(t) = 0.$

In questo caso non vale nessuna delle due ipotesi alternative , perché :

1. non è vero che in un intorno di $x_0 = 0$ $\varphi(x)$ è diversa dal suo limite L = 0
2. non è vero che f (t) è continua nel punto L = 0. ✓

Il teorema sul limite di una funzione composta è importante nelle applicazioni perché è alla base del **metodo del cambiamento di variabile** nel calcolo dei limiti.

Formalmente, si procede come segue:

$$\lim_{x \to x_0} f\left(\varphi(x)\right) \underset{t=\varphi(x)}{=} \lim_{t \to L} f(t) = M$$

dopo aver osservato che vale una delle due ipotesi aggiuntive del teorema (di solito basta osservare che φ (x) non compie infinite oscillazioni attorno alla posizione limite).

Esempio 1

Faremo vedere più avanti che:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x} = e .$$

Posto t = 1 / x , si deduce che è anche

$$\lim_{t \to 0^{\pm}} \left(1 + t \right)^{1/t} = e .$$

Esempio 2

Dal limite appena trovato deduciamo che è:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log (1 + x)}{x} = e$$

Infatti, posto $t = (1 + x)^{1/x}$, il limite da calcolare diventa

$$\lim_{t \to e} \log t = \log e = 1 .$$

Allo stesso modo si trova :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\log (1 + \varphi (x))}{\varphi (x)} = 1$$

se $\varphi (x)$ è una funzione che tende a 0 per $x \to x_0$ (e che verifica l'ipotesi del teorema) . Più avanti memorizzeremo questo risultato dicendo che il logaritmo di una funzione che tende ad 1 si può approssimare con la funzione diminuita di 1.

Esempio 3

Faremo vedere che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1.$$

Allora è anche

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}2x}{2x} = 1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}\,(x-1)}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\text{sen}\,(x^2-4)}{x^2-4} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\,\text{sen}\,\frac{1}{x} = 1$$

<u>In generale</u>

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\text{sen}\,\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$$

se $\varphi(x)$ è una funzione come nel teorema , che tende a 0 per $x \to x_0$.

Funzioni limitate vs funzioni aventi limite

$f(x)$ limitata in un intorno di x_0 $\quad\nRightarrow\quad$ $f(x)$ dotata di limite per $x \to x_0$

$f(x)$ dotata di limite per $x \to x_0$ $\quad\nRightarrow\quad$ $f(x)$ limitata in un intorno di x_0

$f(x)$ dotata di limite finito per $x \to x_0$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $f(x)$ limitata in un intorno di x_0

Osservazione

Per $x \to x_0$

$$f(x) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \to 0$$

$f(x) \to L \Leftrightarrow f(x) - L \to 0 \Leftrightarrow |f(x) - L| \to 0$

Operazioni con limiti reali

Siano f (x) e g (x) due funzioni dotate di limite finito per $x \to x_0$:

$$f(x) \to L \in \mathbf{R} \quad g(x) \to M \in \mathbf{R} .$$

Allora:

$$\mathbf{f(x) + g(x) \to L + M}$$

$$\mathbf{|f(x)| \to |L|}$$

$$\mathbf{c\ f(x) \to c\,L} \qquad \text{(c costante)}$$

$$\mathbf{f(x)\,g(x) \to L\,M}$$

$$\mathbf{f(x)/g(x) \to L/M} \qquad (M \neq 0)$$

dimostrazione del prodotto

$$|f(x)g(x) - LM| = |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| =$$

$$= |(f(x) - L)g(x) + L(g(x) - M)| \leq$$

$$\leq |f(x) - L||g(x)| + |L||g(x) - M| \leq$$

$$\leq |f(x) - L|\,k + |L||g(x) - M| \leq$$

g (x) è limitata localmente ; | g (x) | ≤ k

$$\leq c\left(|f(x) - L| + |g(x) - M|\right)$$

Il secondo membro tende a 0; per confronto lo stesso fa il primo membro.

Operazioni con limiti infiniti

Quando vogliamo estendere i risultati precedenti al caso generale, prendendo in considerazione anche la possibilità di limiti infiniti, incontriamo alcune difficoltà

- Se per $x \to x_0$ risulta $f(x) \to L \in \overline{\mathbb{R}}$, allora:

$\mathbf{|f(x)| \to |L|}$ dove $|\pm\infty| = +\infty$

$\mathbf{c\ f(x) \to c\,L}$ dove $c(\pm\infty) = \pm\infty$ con la consueta regola dei segni. Nel caso banale $c = 0$, la funzione $c\ f(x)$ vale identicamente 0 e anche il limite è 0.

- Se per $x \to x_0$ risulta $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to M \in \overline{\mathbb{R}}$, allora:

$\mathbf{f(x) + g(x)} \to +\infty$ **eccetto** il caso in cui $M = -\infty$

L'espressione $\infty - \infty$ è priva di senso

- Se per $x \to x_0$ risulta $f(x) \to -\infty$, $g(x) \to M \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

$\mathbf{f(x) + g(x)} \to -\infty$ **eccetto** il caso in cui $M = +\infty$

L'espressione $\infty - \infty$ è priva di senso.

- Se per $x \to x_0$ risulta $f(x) \to \pm\infty$, $g(x) \to M \in \overline{\mathbb{R}}$, allora:

$f(x)\, g(x) \to \infty$ con il segno opportuno

eccetto il caso in cui $M = 0$

il prodotto $\infty\, 0$ non ha senso

- Se per $x \to x_0$ risulta $f(x) \to L \in \overline{\mathbb{R}}$, $g(x) \to \pm\infty$, allora:

$f(x) / g(x) \to 0$ **eccetto il caso in cui $L = \pm\infty$**

il rapporto ∞ / ∞ non ha senso

- Se per $x \to x_0$ risulta $f(x) \to L \in \overline{\mathbb{R}}$, $g(x) \to 0$, allora:

$f(x) / g(x) \to \infty$ **con il segno opportuno**

eccetto il caso in cui $L = 0$

il rapporto $0 / 0$ non ha senso

Osservazione

Perché il risultato sia vero, serve che $g(x)$ tenda a 0^+ o a 0^- . Ad esempio , il limite di $1/x$ per $x \to 0$ non esiste.

I casi che sono rimasti fuori dall'elenco dei risultati ottenuti

$$\infty - \infty \quad , \quad \mathbf{0}\,\infty \quad , \quad \mathbf{0\,/\,0} \quad , \quad \infty\,/\,\infty$$

si dicono **forme di indeterminazione o indeterminate:** non è possibile stabilire a priori alcun risultato generale e la risposta dipende volta per volta dalle funzioni considerate.

Diamo alcuni esempi.

Esempio 1

Consideriamo il comportamento delle seguenti funzioni per $x \to +\infty$:

(i) $f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = -x$

$$f(x) + g(x) = x^2 - x = x^2 \; (1 - 1/x) \to +\infty$$

(ii) $f(x) = x \quad , \quad g(x) = -x^2$

$$f(x) + g(x) = x - x^2 \to -\infty$$

(iii) $f(x) = x \quad , \quad g(x) = -x + 1/x$

$$f(x) + g(x) = 1/x \to 0$$

(i v) $f(x) = x$, $g(x) = -x + \text{sen } x$

$$f(x) + g(x) = \text{sen } x \text{ non ha limite}$$

Negli esempi precedenti la somma f (x) + g (x) dà origine alla forma indeterminata $\infty - \infty$: il risultato varia caso per caso e dunque non è possibile stabilire a priori una risposta generale.

Esempio 2

Consideriamo il comportamento delle seguenti funzioni per $x \to +\infty$:

(i) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x + 1$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = x\;\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} \to +\infty$$

(i i) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 + 1$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x}\;\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \to 0$$

(iii) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x + 2$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{x+1} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \to 1$$

(iv) $f(x) = (2 + \operatorname{sen} x)\, x$, $g(x) = x$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 2 + \operatorname{sen} x \to \text{non esiste}$$

Questi esempi provano l'indeterminazione della forma ∞ / ∞: anche stavolta il risultato varia caso per caso.

La **funzione potenza** $f(x)^{g(x)}$ è definita dall'uguaglianza

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)} .$$

Per calcolare un limite di questa funzione, basterà calcolare l'analogo limite per l'esponente $g(x) \log f(x)$.

Infatti se per $x \to x_0$ risulta

$$g(x) \log f(x) \to \begin{cases} L \in R \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

allora per la funzione potenza si ha rispettivamente :

$$e^{\,g(x)\log f(x)} \rightarrow \begin{cases} e^{L} \\ +\infty \\ 0 \end{cases} .$$

Il calcolo del limite del prodotto g (x) log f (x) può portare alla forma indeterminata 0 ∞; ciò accade se:

$$\begin{array}{llll} g(x)\rightarrow 0 & \log f(x)\rightarrow +\infty & & f(x)\rightarrow +\infty \\ g(x)\rightarrow 0 & \log f(x)\rightarrow -\infty & \text{cioè} & f(x)\rightarrow 0 \\ g(x)\rightarrow \pm\infty & \log f(x)\rightarrow 0 & & f(x)\rightarrow 1 \end{array}$$

Dunque, esaminando le funzioni potenza, si incontrano le forme indeterminate

$$\infty^{\mathbf{0}} \qquad \mathbf{0}^{\mathbf{0}} \qquad \mathbf{1}^{\infty} \; .$$

A conclusione del paragrafo, riportiamo sotto forma di tabelle alcuni dei risultati ottenuti: i punti interrogativi corrispondono a forme indeterminate, le lettere L ed M indicano **numeri reali**.

Tabella 1 : limite della somma **f + g**, noti i limiti delle funzioni f e g

f / g	$+\infty$	L	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
M	$+\infty$	L+M	$-\infty$
$-\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$

Tabella 2 : limite del prodotto **f g**, noti i limiti delle funzioni f e g

g \ f	$+\infty$	$L > 0$	0	$L < 0$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$M > 0$	$+\infty$	LM	0	LM	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$M < 0$	$-\infty$	LM	0	LM	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Tabella 3 : limite del quoziente **f / g**, noti i limiti delle funzioni f e g

g \ f	$+\infty$	$L > 0$	0	$L < 0$	$-\infty$
$+\infty$	?	0	0	0	?
$M > 0$	$+\infty$	L / M	0	L / M	$-\infty$
$0^{\pm}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	$\mp\infty$	$\mp\infty$
$M < 0$	$-\infty$	L / M	0	L / M	$+\infty$
$-\infty$	?	0	0	0	?

Tabella 4 : limite della potenza $\mathbf{f}^{\mathbf{g}}$, noti i limiti delle funzioni f e g

f / g	0^+	$L < 1$	0	$L > 1$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	?	$+\infty$	$+\infty$
$M > 0$	0	L^M	1	L^M	$+\infty$
0	?	1	1	1	?
$M < 0$	$+\infty$	L^M	1	L^M	0
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	0	0

Asintoti all' infinito

Una retta di equazione $y = m x + p$ si dice costituire un **asintoto** della funzione $f(x)$ per $x \to +\infty$ se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - m x - p = 0,$$

cioè se al crescere di x il grafico della funzione si avvicina arbitrariamente alla retta. Allo stesso modo possiamo considerare il comportamento per $x \to -\infty$.

Dalla definizione risulta subito che deve essere

$$\mathbf{p = \lim_{x \to +\infty} f(x) - m x}$$

Sempre dalla definizione si ottiene

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - m x - p}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - m - \frac{p}{x} = 0$$

e poiché $p / x \to 0$, questo equivale a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0$$

e dunque a

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad .$$

In conclusione, se f (x) ammette l'asintoto di equazione y = m x + p, i coefficienti m e p sono individuati dai due limiti che abbiamo ricavato.

Viceversa se

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

esiste ed è un numero reale m e se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - m\,x$$

esiste ed è un numero reale p, allora la retta di equazione y = m x + p è asintoto per la funzione.

In particolare, se m = 0, ritroviamo la definizione di asintoto orizzontale già nota.

Esempio

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad , \quad x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Per $x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$; dunque se c'è asintoto, non è orizzontale.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \frac{x\sqrt{1 - 1/x^2}}{x} \to 1$$

$$f(x) - x = \sqrt{x^2 - 1} - x = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \to 0^-$$

Dunque, per $x \to +\infty$ la funzione ha come asintoto la retta di equazione $y = x$; inoltre il suo grafico si avvicina alla retta rimanendone al di sotto.

Per $x \to -\infty$ $f(x) \to +\infty$. Adesso si ha:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \frac{-x\sqrt{1 - 1/x^2}}{x} \to -1$$

$$f(x) + x = \sqrt{x^2 - 1} + x = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} \to 0^-$$

Dunque, per $x \to -\infty$ la funzione ha come asintoto la retta di equazione $y = -x$ ed il suo grafico si avvicina alla retta rimanendone al di sotto.