8 Infinitesimi ed infiniti

I simboli di Landau (versione semplificata)

Siano f (x) e g (x) due funzioni definite in un intorno di un punto $x_0 \in \overline{R}$ escluso al più x_0, con g (x) $\neq$ 0 (anche in questo caso, escluso al più x_0).

Se per $x \to x_0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \begin{cases} \text{non esiste} \\ 0 \\ \pm\infty \\ k \in R - \{0\} \end{cases} \quad \text{scriveremo} \quad \begin{cases} \text{f e g non confrontabili} \\ f = o(g) \\ g = o(f) \\ f \approx k\,g \end{cases}$$

Leggeremo queste notazioni:

f è un **o piccolo** (**o)** di g (o viceversa)

f è **equivalente** (o asintoticamente uguale) a g

e diremo anche

f è **trascurabile** rispetto a g (o viceversa)

f è **approssimabile** con L g

(la giustificazione di questi due termini sarà data più avanti).

Esempio di funzioni non confrontabili: per x→+∞ senx , 1 / x (il loro rapporto x senx non ha limite).

Per $x \to x_0$ $f = o(1)$ significa che la funzione $f(x)$ è infinitesima per $x \to x_0$

Per $x \to 0$ $\operatorname{sen} x \approx x$, $1 - \cos x = o(x)$

Per $x \to 1$ $\log x \approx x - 1$

Per $x \to +\infty$ $\log x = o(x)$

Per $x \to 0$ $x = o(x \log x)$.

La scrittura $f = o(g)$ é soltanto una <u>notazione</u> che riassume un legame tra il comportamento locale di f e quello di g (più precisamente, il limite del loro rapporto per $x \to x_0$) e dunque non va trattata algebricamente come le funzioni a cui si riferisce.
Ad esempio , le scritture della forma

$$k\, o(g) \quad (k \neq 0) , \qquad o(g) + o(g)$$

devono essere sostituite in entrambi i casi con $o(g)$.
Soprattutto <u>non ha senso</u> un'uguaglianza del tipo

$$o(g) - o(g) = 0$$

che va sostituita con

$$o(g) - o(g) = o(g).$$

Ad esempio, per $x \to 0$ dalle scritture

$$\operatorname{sen} x^2 = o(x) \quad , \quad x^2 = o(x)$$

<u>non</u> possiamo ricavare

$$\operatorname{sen} x^2 = x^2 .$$

Ha invece senso scrivere

$g(x)\ o(1) = o(g(x))$.

Legame tra ≈ e o

$f(x) \approx k\, g(x)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - k \right) = 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} - k = o(1)$$

$f(x) = k\, g(x) + g(x)\, o(1)$

$f(x) = k\, g(x) + o(g(x))$

$\mathbf{f(x) \approx k\, g(x) \iff f(x) = k\, g(x) + o(g(x))}$

f (x) è approssimata con un termine proporzionale a g (x) a meno di un errore valutato come trascurabile rispetto a g (x)

k g (x) **parte principale**

o (g (x)) **resto o errore**

Principio di sostituzione

$$\mathbf{F = o(f) \ \Rightarrow \ f + F \approx f}$$

$$F = o(f) \ \Rightarrow \ \lim_{x \to x_0} f + F = \lim_{x \to x_0} f \ .$$

Questo significa che nel calcolo del limite di una somma $f + o(f)$ possiamo **approssimare** questa espressione con f, cioè possiamo **trascurare** il termine o(f). Chiameremo questa proprietà **principio di sostituzione.**

Per verificare il principio, basta scrivere $f + F = f(1 + F/f)$ ed osservare che il termine in parentesi tende ad 1:

$$\lim_{x \to x_0} f + F = \lim_{x \to x_0} f(1 + F/f) = \lim_{x \to x_0} f \ .$$

Principio di sostituzione nella forma generale

$$\mathbf{F = o(f)\,,\ \ G = o(g) \ \Rightarrow \ \frac{f + F}{g + G} \approx \frac{f}{g}}$$

$$\mathbf{F = o(f)\,,\ \ G = o(g)} \ \Rightarrow \ \lim_{x \to x_0} \frac{f + F}{g + G} = \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}$$

Questo significa che nel calcolo del limite di un rapporto possiamo sostituire $f + o(f)$ con f e $g + o(g)$ con g , trascurando i termini o (f), o (g).
Chiameremo questa proprietà **principio di sostituzione generale.**

$$\frac{f + F}{g + G} = \frac{f(1 + F/f)}{g(1 + G/g)}$$; i due termini in parentesi tendono ad 1.

Esempi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 2x - x}{\log(1+4x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + o(x) - x}{4x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0\pm} \frac{\sqrt[4]{1+x^3} - 1}{\sqrt[3]{1+x^4} - 1} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{x^3/4 + o(x^3)}{x^4/3 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{x^3/4}{x^4/3} = \pm\infty$$

Dobbiamo vedere quando queste approssimazioni sono lecite e come si realizzano nella pratica.

Poiché le forma indeterminate si hanno in presenza di infinitesimi e di infiniti, dobbiamo rivolgere l'attenzione a queste funzioni.

I parte : infinitesimi

Infinitesimi di riferimento (unità di misura degli infinitesimi)

se $x_0 \in R$ $g(x) = x - x_0$

se $x_0 = \pm\infty$ $g(x) = 1/x$.

- Le potenze di ordine superiore sono trascurabili rispetto a quelle di ordine inferiore

  se $x_0 \in R$

$$\frac{(x - x_0)^{n+p}}{(x - x_0)^n} = (x - x_0)^p \to 0$$

  se $x_0 = \pm\infty$

$$\frac{1/x^{n+p}}{1/x^n} = \frac{x^n}{x^{n+p}} = \frac{1}{x^p} \to 0$$

- Associamo ad ogni infinitesimo una potenza dell'infinitesimo di riferimento.

  Diremo che per $x \to x_0$ $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine α** > 0 se esiste $k \neq 0$ tale che $f(x) \approx k\, g^{\alpha}(x)$, cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g^{\alpha}(x)} = k.$$

  Quindi :

  se $x_0 \in R$ $\quad f(x) = k(x - x_0)^{\alpha} + o(x - x_0)^{\alpha}$

  se $x_0 = \pm\infty$ $\quad f(x) = k / x^{\alpha} + o(1/x)^{\alpha}$

L'infinitesimo $f(x)$ è dunque scritto come somma di una potenza di $x - x_0$ o di $1/x$ più un termine trascurabile, che diciamo infinitesimo di ordine superiore.

In questo modo siamo in grado di confrontare tra loro due infinitesimi e dire se sono dello stesso ordine oppure quale dei due è di ordine superiore all'altro.

Esempi

Supponiamo $x \to 0$ e quindi scegliamo $g(x) = x$:

$\operatorname{sen} x \approx x$ cioè $\operatorname{sen} x = x + o(x)$

$1 - \cos x \approx x^2 / 2$ $\quad 1 - \cos x = x^2/2 + o(x^2)$ o anche

$\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$

$\operatorname{tg} x \approx x$ $\quad \operatorname{tg} x = x + o(x)$

$e^x - 1 \approx x$ $\quad e^x = 1 + x + o(x)$

$\log(1 + x) \approx x$ $\quad \log(1 + x) = x + o(x)$

$(1 + x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$ $\quad (1 + x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x + o(x)$

Altri esempi

per $x \to 1$ $\quad \log x \approx x - 1$

per $x \to +\infty$ $\quad e^{1/x} - 1 \approx 1/x$

per $x \to +\infty$ $\quad \sqrt{1+1/x} - 1 \approx 1 / 2x$

per $x \to 0$ $\quad \operatorname{sen} \sqrt{x} \approx \sqrt{x}$

per $x \to 0$ $\quad \cos 2x \approx 1 - 2x^2$

per $x \to 0$ $\quad \operatorname{arcsen} x$, $\operatorname{arctg} x \approx x$

per $x \to 0$ $\quad \pi/2 - \arccos x \approx x$

$$\pi/2 - \arccos x \approx \operatorname{sen}(\pi/2 - \arccos x) = \cos \arccos x = x$$

per $x \to 1^-$ $\quad \arccos x \approx \sqrt{2(1-x)}$

$$\arccos x \approx \operatorname{sen} \arccos x = \sqrt{1-\cos^2 \arccos x} = \sqrt{1-x^2}$$

$$= \sqrt{(1+x)(1-x)} \approx \sqrt{2(1-x)}$$

Osservazione

Non tutti gli infinitesimi hanno ordine e parte principale rispetto all'infinitesimo campione; ad esempio, la funzione $x \log x$, per $x \to 0$:

$$x \log x \,/\, x^{1+\varepsilon} = \log x / x^{\varepsilon} \to -\infty$$
$$x \log x \,/\, x = \log x \to -\infty$$
$$x \log x \,/\, x^{1-\varepsilon} = x^{\varepsilon} \log x \to 0$$

x log x è di ordine superiore ad ogni potenza x^{α} con $\alpha \le 1$
x log x è di ordine inferiore ad ogni potenza x^{α} con $\alpha > 1$

Analogamente, la funzione e^{x} per $x \to -\infty$ non ha ordine né parte principale rispetto all'infinitesimo campione 1 / x. Infatti

$$\frac{e^{x}}{1/|x|^{\alpha}} = e^{x}\,|x|^{\alpha} \to 0$$

e dunque la funzione è infinitesima di ordine inferiore ad ogni potenza $1/|x|^{\alpha}$.

Regole di sostituzione

1. **In un prodotto possiamo sostituire ad ogni termine che tende ad un numero k diverso da 0 il valore del limite stesso e ad ogni infinitesimo la sua parte principale.**

$$f \approx L g^{\alpha} \ , \ F \approx M g^{\beta} , \ \varphi \to k \ \Rightarrow \ f F \varphi \approx LM k \ g^{\alpha+\beta}$$

Infatti

$$\frac{f F \varphi}{g^{\alpha+\beta}} = \frac{f}{g^{\alpha}} \frac{F}{g^{\beta}} \varphi \to L M k$$

<u>Esempi</u>

$$\text{per } x \to 0 \quad \text{sen}^2 x \approx x^2 \ , \ \text{sen}\, x\,(1-\cos x) \approx x^3/2 \ .$$

2. **Nella somma di due infinitesimi di ordine diverso si può trascurare quello di ordine superiore ,** cioè

$$F = o(f) \quad \Rightarrow \quad f + F \approx f$$

<u>Esempi</u> per $x \to 0$

$2x^4 + 3x^2 - x \approx -x$ $\sqrt{1+x} - 1 + x^2 \approx x/2$

$e^x - 1 + x^2 \approx x$ $\operatorname{sen} x + 1 - \cos x \approx x$

3. **La somma di due infinitesimi dello stesso ordine ha per parte principale la somma delle parti principali, <u>purché questa sia diversa da 0</u>,** cioè

$$f \approx L g^{\alpha}\ ,\ F \approx M g^{\alpha} \ \Rightarrow\ f + F \approx (L+M) g^{\alpha},\ \text{se}\ \ L+M \neq 0$$

<u>Esempi</u> per $x \to 0$

$\operatorname{sen} x^2 + \operatorname{tg}^2 x \approx 2x^2$ $\sqrt{1+x} - 1 + x \approx 3x/2$

$e^x - 1 + x \approx 2x$ $\log(1+x) + x \approx 2x$

4. **Se la somma S delle parti principali di ordine minimo α è 0, l'approssimazione non è più lecita. In questo caso S è un infinitesimo di ordine superiore ad α. Può dunque accadere che qualcuno degli infinitesimi che inizialmente avevamo trascurato rientri in gioco.**

$$f \approx L g^{\alpha}\ ,\ F \approx -L g^{\alpha} \ \Rightarrow\ f + F \approx o(g^{\alpha})$$

<u>Esempi</u> per $x \to 0$

$\operatorname{sen} x - x = o(x)$ $\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x = o(x)$

$\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x \approx -x^3/2$ $\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x - x^2 \approx -x^2$

Per quanto riguarda il terzo esempio, il risultato si ottiene scrivendo

$$\text{sen } x - \text{tg } x = \text{tg } x (\cos x - 1) \approx - x^3 / 2$$

Nell'ultimo esempio saremmo portati a trascurare x^2 perché di ordine superiore sia a sen x che a tg x; in realtà, come abbiamo visto, sen x - tg x è un infinitesimo del terzo ordine e quindi è questa differenza che deve essere trascurata rispetto a x^2.

Esercizi : calcolare i seguenti limiti

per $x \to 0$ $$\frac{\text{sen}x + 1 - \cos x}{e^x - 1 + \log(1 + x^2)}$$

per $x \to 0$ $$\frac{\text{sen}x^2 + 1 - \cos x}{(1 + x^2)^3 - 1}$$

per $x \to 0$ $$\frac{\text{sen}x + \text{tg}x + x^2}{e^{2x} - \sqrt{1 + x}}$$

per $x \to 0$ $$\frac{(4 - e^x)\,\text{sen}x + \text{tg}x + \log(1 + \text{sen}^2 x)}{(\sqrt{1 + x} - 1)(\sqrt[4]{1 + x} + 1)}$$

per $x \to +\infty$ $$x (e^{1/x} - \cos 1/x)$$

per $x \to 0^+$ $$\frac{(5x + 1)^{10} - 1}{(e^{\sqrt{x}} - 1)\,\text{sen}\sqrt{x}}$$

per $x \to 0$ $$\frac{\text{sen}x + \text{tg}x}{x^2 \log(2 - e^x)}$$

II parte : infiniti

Infiniti di riferimento (unità di misura degli infiniti)

se $x_0 \in R$ $\quad g(x) = 1/(x - x_0)$

se $x_0 = \pm\infty$ $\quad g(x) = x$.

- Le potenze di ordine inferiore sono trascurabili rispetto a quelle di ordine superiore

  se $x_0 \in R$

  $$\frac{1/(x - x_0)^{n-p}}{1/(x - x_0)^{n}} = (x - x_0)^{p} \to 0$$

  se $x_0 = \pm\infty$

  $$\frac{x^{n-p}}{x^{n}} = \frac{1}{x^{p}} \to 0$$

- Associamo ad ogni infinito una potenza dell'infinito di riferimento.

  Diremo che per $x \to x_0$ $f(x)$ è un **infinito di ordine α** > 0 se esiste $k \neq 0$ tale che $f(x) \approx k\, g^{\alpha}(x)$, cioè

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g^{\alpha}(x)} = k.$$

  Quindi :

  se $x_0 \in R$ $\quad f(x) = k/(x - x_0)^{\alpha} + o(1/(x - x_0)^{\alpha})$

se $x_0 = \pm\infty$ $\quad f(x) = k x^{\alpha} + o(x^{\alpha})$

L'infinito f (x) è dunque scritto come somma di una potenza di 1 / ($x - x_0$) o di x più un termine trascurabile, che può essere un infinito di ordine inferiore oppure un termine limitato.

Osservare la differenza con l'analogo risultato visto per infinitesimi: in quel caso il resto era un infinitesimo di ordine superiore alla parte principale; adesso può essere un infinito (di ordine inferiore alla parte principale) oppure un termine limitato. Guardiamo alcuni esempi, tutti per $x \to +\infty$:

1. $\sqrt{x^2+1} = x + o(x)$

   In questo caso il termine o (x) non è un infinito; infatti:

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \to 0.$$

2. $\sqrt{x^2+x} = x + o(x)$

   Anche in questo caso il termine o (x) non è un infinito; infatti:

$$\sqrt{x^2+x} - x = \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right)} \to 1/2 .$$

3. $\sqrt{x^3+x^2} = x^{3/2} + o(x^{3/2})$

   In questo caso per il termine o (x) si ha:

$$\sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3} = \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + x^2} + \sqrt{x^3}} = \frac{x^{3/2}\sqrt{x}}{x^{3/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right)} \to +\infty$$

e dunque stavolta si tratta proprio di un infinito.

Come già per gli infinitesimi, non tutti gli infiniti hanno ordine e parte principale rispetto all'infinito campione; ad esempio, per $x \to +\infty$ esponenziali e logaritmi non hanno ordine di infinito rispetto ad x (anche se sappiamo confrontarli: gli esponenziali sono infiniti di ordine superiore ad ogni potenza, i logaritmi di ordine inferiore).

Per gli infiniti valgono proprietà analoghe a quelle viste per gli infinitesimi .

Regole di sostituzione

1. **In un prodotto possiamo sostituire ad ogni termine che tende ad un numero diverso da 0 il valore del limite stesso , ad ogni infinitesimo e ad ogni infinito la loro parte principale.**

2. **Nella somma di due infiniti di ordine diverso si può trascurare quello di ordine inferiore; a più forte ragione, nella somma tra un infinito ed un termine limitato si può trascurare quest'ultimo**

3. **La somma di due infiniti dello stesso ordine può essere sostituita dalla somma delle parti principali, <u>purché questa sia diversa da 0</u>**

4. **Se nella somma S di due infiniti dello stesso ordine massimo α la somma delle parti principali vale 0, l'approssimazione non è più lecita (S è un infinito di ordine inferiore ad α oppure è un termine limitato).**

Esempi per $x \to +\infty$

$$x^4 - x^3 + x + 1 \approx x^4 \qquad\qquad e^x - x^5 \approx e^x$$

$$\sqrt{x} - \log^3 x \approx \sqrt{x} \qquad\qquad x - \operatorname{sen} x + 2 \approx x$$

Esempi per $x \to 0$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{2}{x} \approx -\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x} \approx \frac{-x^2/2}{x} = -\frac{x}{2}$$

$\displaystyle \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x}\right)$, per il momento non possiamo precisare meglio.

per $x \to +\infty$ $\quad \sqrt{x^2 + x} - x$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} \approx \frac{x}{2x} \to 1/2 \ .$$

per $x \to +\infty$ $\quad \sqrt{x^3 + x^2} - \sqrt{x^3}$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{x^3+x^2} + \sqrt{x^3}} \approx \frac{x^2}{2x^{3/2}} \to +\infty$$

- per $x \to +\infty$ $\quad \sqrt{x^3 + a x^2 + b x + c} - m x \sqrt{x+2}$

$$\sqrt{x^3 + a x^2 + b x + c} \approx x^{3/2} \quad , \quad x\sqrt{x+2} \approx x^{3/2}$$

se $m \neq 1$

$$f(x) \approx (1-m)\,x^{3/2}$$

se $m = 1$

$$f(x) = \frac{(a-2)\,x^2 + b\,x + c}{\sqrt{x^3 + a\,x^2 + b\,x + c} + \sqrt{x^3 + 2\,x^2}} \approx$$

$$\approx \frac{(a-2)\,x^2 + b\,x + c}{2\,x^{3/2}}$$

se $m = 1$, $a \neq 2$

$$f(x) \approx \frac{a-2}{2}\,x^{1/2}$$

se $m = 1$, $a = 2$, $b \neq 0$

$$f(x) \approx \frac{b}{2\,x^{1/2}}$$

se $m = 1$, $a = 2$, $b = 0$, $c \neq 0$

$$f(x) \approx \frac{c}{2\,x^{3/2}}$$

se $m = 1$, $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$

$$f(x) = (\,|x| - x\,)\sqrt{x+2} = 0 \quad \forall x \geq 0.$$

Esercizi : calcolare i seguenti limiti

per $x \to +\infty$ $$\frac{x^4 + x^3 - 1}{x^3 + 3 + \log x}$$

per $x \to +\infty$ $$\left(2 - \frac{1}{x}\right) \log x - \log x^3$$

per $x \to +\infty$ $$e^x - x^3 + 3 \operatorname{sen} x$$

per $x \to +\infty$ $$\left(2 - \frac{1}{x}\right) \log^3 x - 3^x$$

per $x \to +\infty$ $$\sqrt{x^3 + x + 1} - 2x\sqrt{x}$$

per $x \to +\infty$ $$\frac{x^2 - x\log^4 x + \cos x}{\sqrt{1 + x^2 + \log^4 x}}$$

per $x \to -\infty$ $$\frac{5x + 7}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

per $x \to -\infty$ $$x^2 e^x$$

Esercizio

Porre in ordine crescente le seguenti funzioni infinite per $x \to +\infty$:

$\exp x^3$ $\quad \exp 3x$ $\quad \exp(x^3 \log x)$ $\quad \exp(\log^2 x)$ $\quad x^5 \log^2 x$ $\quad x^x$.