# Soluzioni

1. C.E. $x > 0$

LIMITI per $x \to 0$ $\quad f(x) \to \begin{cases} -\infty & \text{se } k > 0 \\ +\infty & \text{se } k < 0 \end{cases}$

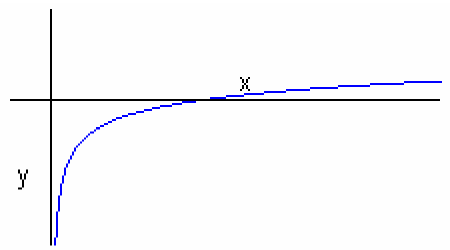
per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \to +\infty$ ( senza asintoto )

DERIVATA $f'(x) = (x + k) / x^2$

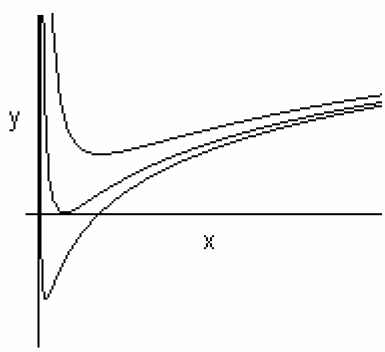
per $k > 0$ è sempre positiva , per $k < 0$ lo è per $x > -k$

$f''(x) = (-2k - x) / x^3$

per $k > 0$ è sempre negativa , per $k < 0$ è positiva per $x < -2k$




per $k > 0$




per $k < -1/e$ , $k = -1/e$ , $-1/e < k < 0$

2. L'integrale è improprio perché la funzione non è limitata nell'intorno di $x = \pi / 4$ . Poiché per $x \to \pi / 4$ $\;f(x) \sim 1 / (1 - \operatorname{tg} x) = g(x)$ , possiamo stabilire l'ordine di infinito di $g(x)$ . Utilizzando la formula di Taylor , $\operatorname{tg} x \sim 1 + 2(x - \pi/4)$ e dunque l'infinito è di ordine 1 : l'integrale non esiste .

Calcoliamo l'integrale, ponendo $t = \operatorname{tg} x$ : $I = \int_0^1 \frac{t^2}{(1-t)(1+t^2)}\,dt$ . Ma

$$\frac{t^2}{(1-t)(1+t^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} - \frac{t+1}{1+t^2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-t} - \frac{1}{4}\,\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t^2}$$

e dunque , integrando , si trovano le primitive

$$\frac{t^2}{(1-t)(1+t^2)} = \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}\log(1-t) - \frac{1}{4}\log(1+t^2) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + c\,.$$

Per $t \to 1$, queste funzioni tendono a $+\infty$.

3. Poiché
$\operatorname{arcsen} x \sim x + x^3/6$, $\sqrt[4]{1+x^4} \sim 1 + x^4/4$, $\cos(x^2) \sim 1 - x^4/2$,
sostituendo, si trova $(x^4/6)/(3x^4/4) \to 2/9$.

4. Perché sia verificata la condizione necessaria, deve essere $|x| < 1$.
Per $x = 0$ la serie si annulla e dunque converge.
Per $|x| < 1$, $x \neq 0$ la serie equivale a $n\,|x|^n$; applicando il criterio della radice o del rapporto, si deduce la convergenza.

5. Il problema può perdere l'unicità di soluzione solo in corrispondenza delle soluzioni costanti dell'equazione : $y = \pm 2$ ; però, dato che la funzione $1/(4-y^2)$ non è integrabile nell'intorno di $\pm 2$, ciò non accade.
Risolviamo il problema limitatamente al caso $-2 < y < 2$ che interessa.

$$\int_1^y \frac{ds}{4-s^2} = \int_0^x ds \Rightarrow \frac{1}{4}\log\frac{2+y}{2-y} - \frac{1}{4}\log 3 = x \Rightarrow \log\left(\frac{2+y}{3(2-y)}\right)^{1/4} = x \Rightarrow$$

$$y(x) = 2\,\frac{3e^{4x}-1}{3e^{4x}+1}\,, \quad x \in R$$