Soluzioni

1.

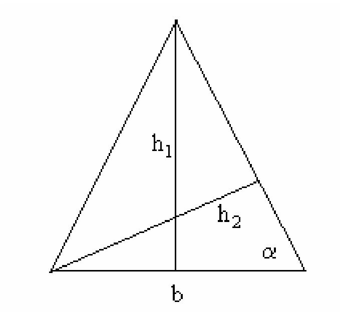
$\cos\alpha = 1/\sqrt{5}$, $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

$\cos\beta = \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = 3/5$

$\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$

$b/2 = 2\cos\alpha \Rightarrow b = 4\sqrt{5}/5$

$h_1 = 2\operatorname{sen}\alpha = 4\sqrt{5}/5$, $h_2 = b\operatorname{sen}\alpha = 8/5$



2.

(a) Deve essere $\operatorname{sen} x < 0$ oppure :

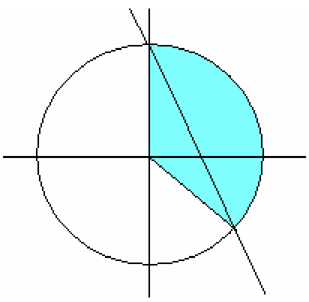
$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \geq 0 \\ 1 - \operatorname{sen} x > 2\operatorname{sen}^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x \geq 0 \\ -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq \operatorname{sen} x \leq 1/2 .$$

In conclusione : $\operatorname{sen} x \leq 1/2$, cioè $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{13\pi}{6} + 2k\pi$.

(b) Posto $\cos x = X$, $\operatorname{sen} x = Y$, ci riconduciamo a studiare il sistema :

$$Y + 2X > 1 \quad , \quad X^2 + Y^2 = 1$$

La retta $Y + 2X = 1$ interseca la circonferenza nei punti $(0, 1)$, $(4/5, -3/5)$.



Posto $\alpha = -\operatorname{arcsen} 3/5 = -\arccos 4/5 = -\operatorname{arctg} 3/4$, la disequazione è verificata per $\alpha + 2k\pi < x < \pi/2 + 2k\pi$.

3.

Per il C.E.

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x - \sqrt{x^2 - 4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \ \text{ oppure } \ x \leq -2 \\ \sqrt{x^2 - 4} < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 4 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

Per il segno : la funzione è positiva se

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x - \sqrt{x^2 - 4} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x^2 - 4} \leq x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 4 \leq x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; 2 \leq x \leq 5/2 .$$

Dunque la funzione si annulla per $x = 5/2$, è positiva per $2 \leq x < 5/2$, negativa per $x > 5/2$. e per $x > 1$ è negativa .

Per le altre domande, consideriamo l'equazione $f(x) = k$: questa equivale successivamente a $\sqrt{x^2 - 4} = x - e^k \Leftrightarrow x^2 - 4 = (x - e^k)^2$ purché $x - e^k \geq 0$.

Sviluppando i calcoli, si ottiene $x = (4 + e^{2k}) / (2 e^k)$.

La soluzione trovata è accettabile (è facile verificare che è sempre $x \geq 2$) . La condizione $x - e^k \geq 0$ è verificata per $e^{2k} \leq 4$, cioè $k \leq \log 2$.

In definitiva , l'immagine della funzione è $(-\infty , \log 2]$, la funzione è iniettiva e $f^{-1}(x) = (4 + e^{2x}) / (2 e^x)$.

Per provare che la funzione è decrescente , dobbiamo far vedere che

$$2 \leq x < y \;\Rightarrow\; \log(x - \sqrt{x^2 - 4}) > \log(y - \sqrt{y^2 - 4}) .$$

Tenendo conto dell'ipotesi , la disequazione equivale successivamente a

$$x - \sqrt{x^2 - 4} > y - \sqrt{y^2 - 4} \quad \text{cioè} \quad \sqrt{y^2 - 4} - \sqrt{x^2 - 4} > y - x .$$

Elevando (ambo i membri sono positivi) e semplificando :

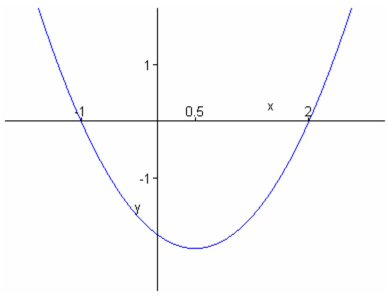
$$xy - 4 > \sqrt{(y^2 - 4)(x^2 - 4)} .$$

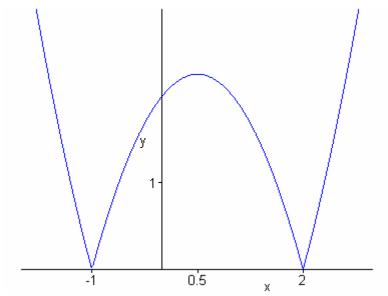
Elevando ulteriormente al quadrato e semplificando , si arriva infine alla forma

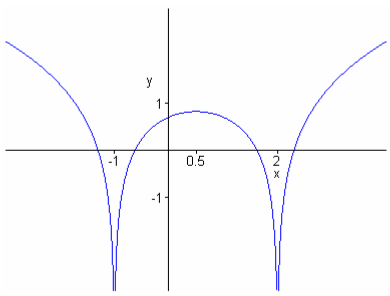
$$4 (x - y)^2 > 0$$

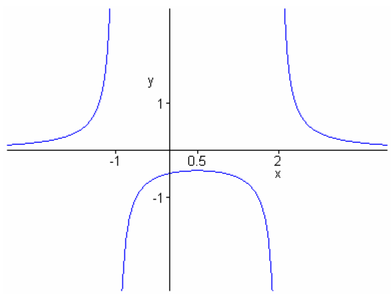
che è vera .

4.









5.

La proposizione afferma che in ogni intorno di x_0 cadono sia punti di A che punti del complementare di A , cioè che x_0 è un punto di frontiera per A .

Per i casi proposti l'insieme dei punti di frontiera è dato rispettivamente da $\{ a , b \}$, $\{ a \}$, R , R .

La negazione della proposizione si scrive nella forma :

$$\exists U(x_0) : U(x_0) \cap A = \varnothing \quad \text{oppure} \quad U(x_0) \cap A^C = \varnothing$$

cioè

$$\exists U(x_0) : U(x_0) \subset A \quad \text{oppure} \quad U(x_0) \subset A^C \quad .$$