Soluzioni della prova parziale n.1 del 7 . 2 . 06

1.

Per il C.E.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > x \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1$$

Per il segno : la funzione è positiva se

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} - x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} \geq x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 + x + 1 \leq 0 \end{cases}$$

Poiché il polinomio di secondo grado ha $\Delta < 0$, la disequazione (e quindi il sistema) è impossibile .
In conclusione , è $f(x) < 0$ in tutto il C.E.

Consideriamo l'equazione $f(x) = k$: questa equivale successivamente a
$\sqrt{x} - x = e^k \Leftrightarrow \sqrt{x} = x + e^k \Leftrightarrow x = (x + e^k)^2$ purché $x + e^k \geq 0$.
Sviluppando i calcoli, si ottiene
$x = \left(1 - 2e^k \pm \sqrt{1 - 4e^k}\right) / 2$ purchè $k \leq -\log 4$.
Le soluzioni trovate sono entrambe accettabili (occorre verificare che è sempre $0 < x < 1$, non riportiamo i relativi calcoli) . Anche la condizione $x + e^k \geq 0$ è sempre verificata (non riportiamo i relativi calcoli) .
In definitiva , l'immagine della funzione è $(-\infty , -\log 4]$ e la funzione non è iniettiva .

2.

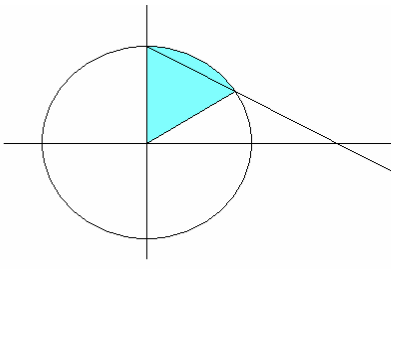
(a)

$\text{sen } 3x = -\text{sen } x \Leftrightarrow \text{sen } 3x = \text{sen}(x + \pi) \Leftrightarrow 3x = x + \pi + 2k\pi$ oppure $3x = \pi - (x + \pi) + 2k\pi$

$\Leftrightarrow x = \pi/2 + k\pi$ oppure $x = k\pi$, con $k = 0 , 1$

(b)

Poniamo $Y = \text{sen } x$, $X = \cos x$ e consideriamo il sistema $2Y + X > 2$, $X^2 + Y^2 = 1$.
Le intersezioni della retta con la circonferenza sono i punti (0 , 1) , (4/5 , 3/5) .

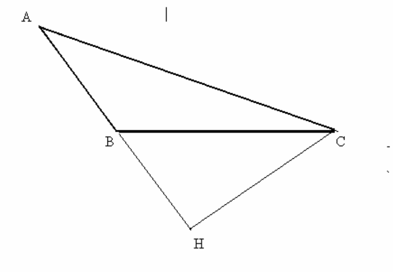


Le soluzioni della disequazione sono :

$\alpha + 2k\pi < x < \pi/2 + 2k\pi$,

dove $\alpha = \arccos 4/5 = \text{arcsen } 3/5 = \text{arctg } 3/4$.

3.



Applicando il teorema di Carnot :

$AC = \sqrt{(77/5)}$.

Per la relazione fondamentale della trigonometria :

$\text{sen}\,\beta = 2\sqrt{6}/5$

Per il teorema dei seni :

$AC / \text{sen}\,\beta = BC / \text{sen}\,\alpha$, da cui $\text{sen}\,\alpha = 6\sqrt{(6/385)}$

Per le proprietà dei triangoli rettangoli :

$CH = AC\ \text{sen}\,\alpha = 6\sqrt{6}/5$.

Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo BCH :

$BH = 3/5$.

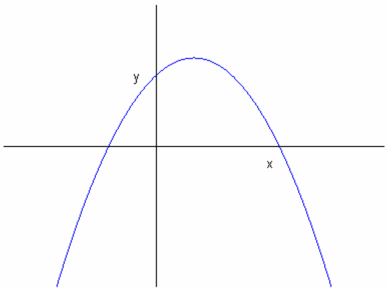
4.

Per n = 1 l'affermazione è verificata , perché la quantità data vale 9 .
Supponiamo l'affermazione vera per n e deduciamola per n + 1 . Poiché

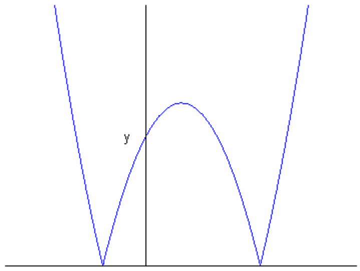
$$10^{n+1} - 1 = 10\ 10^{n} - 1 = 10\,(10^{n} - 1) + 9$$

e sia $10^{n} - 1$ che 9 (ovviamente) sono divisibili per 9 , l'asserto è dimostrato .

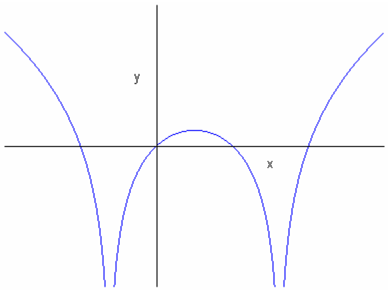
5.



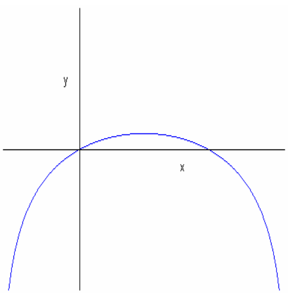
y = f (x)



y = | f (x) |

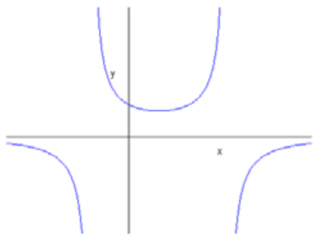


y = log | f (x) |



y = log f (x)
con $(1 - \sqrt{5})/2 < x < (1 - \sqrt{5})/2$

y = | log f (x) |
con $(1 - \sqrt{5})/2 < x < (1 - \sqrt{5})/2$



y = 1 / f (x)