

Introduzione alla Matematica - C. di I. in Chimica molecolare

Prova scritta del 12. 04 .06

1. (punti 6)

Data la funzione

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 \cos x - 1}, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

- trovarne il campo di esistenza e il segno;
- trovarne l'immagine;
- provare che non è invertibile, ma che lo diventa quando si restringe all'intervallo $[0, \pi]$; in questo caso, scrivere l'inversa.

2. (punti 4 + 4)

Risolvere le disequazioni

$$\sin x + |\cos x| \geq 1$$

$$3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \leq \frac{\sqrt{3} \sin x}{1 + \cos x}.$$

3. (punti 6)

Dopo aver disegnato il grafico della funzione $f(x) = (x + 1) / x$, dedurre quello delle funzioni

$$\log \frac{x+1}{x}, \quad \log \left| \frac{x+1}{x} \right|, \quad \log \frac{x+1}{|x|}.$$

4. (punti 5)

Due vettori, rispettivamente di lunghezza 1 e 2, formano un angolo di 60° ; trovare la lunghezza del vettore somma e gli angoli che questo forma con i vettori dati.

5. (punti 5)

Provare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$ il numero $n^3 + 5n$ è divisibile per 6.