Introduzione alla Matematica
Soluzioni della prova scritta del 7 giugno 2006

1.

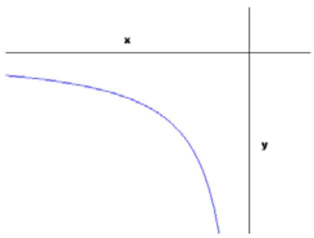
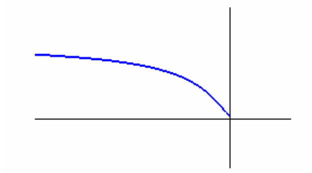
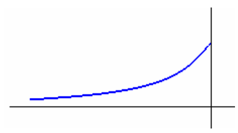
C.E. $\quad x \neq 0\,,\ 2^{1/x} \leq 1 \iff x < 0$

Immagine $\quad f(x) = \alpha \leftrightarrow 2^{1/x} = \cos\alpha$ purché $\alpha \in [0, \pi]$

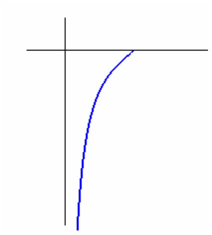
$\leftrightarrow\ 1/x = \log_2 \cos\alpha$ purché $\alpha \in [0, \pi/2)$

$\leftrightarrow\ x = 1/\log_2 \cos\alpha$ purché $\log_2 \cos\alpha < 0$ cioè $\cos\alpha < 1$

In conclusione, l'immagine della funzione è $(0, \pi/2)$, la funzione è invertibile, la funzione inversa è $f^{-1}(\alpha) = 1/\log_2 \cos\alpha$.

$y = 1/x$ $\qquad$ $y = 2^{1/x}$ $\qquad$ $y = \arccos 2^{1/x}$



$y = f^{-1}(x)$ Il grafico è il simmetrico di quello di $f(x)$ rispetto alla bisettrice $y = x$

2.

(i) Sostituendo $\cos^2 x$ con $1 - \operatorname{sen}^2 x$, la disequazione diventa $2\,|\operatorname{sen} x| - \operatorname{sen}^2 x > 0$ che equivale a $0 < |\operatorname{sen} x| < 2$; le soluzioni sono tutti i valori di $x \neq k\pi$.

(ii) L'equazione si riscrive nella forma $\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = 2$.
Ponendo $X = \cos x$, $Y = \operatorname{sen} x$, ci riconduciamo a studiare il sistema $X^2 + Y^2 = 1$, $Y + \sqrt{3}\,X = 2$. Svolgendo i calcoli, si trova che deve essere $X = \sqrt{3}/2$, $Y = 1/2$ e dunque $x = \pi/6 + 2k\pi$.

3.

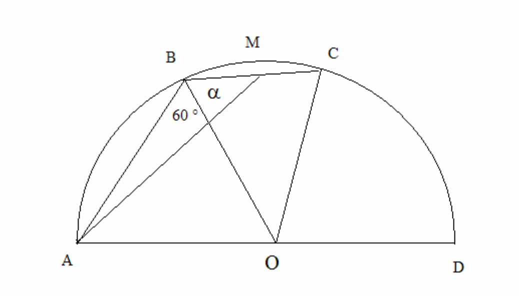
C.E. $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 1-x \leq 0 \\ x+1 > 1-x \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 1]$

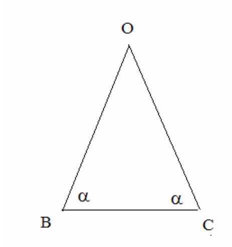
SGN $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow$ elevando al quadrato e svolgendo i calcoli

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \leq 1/2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0, 1] \\ 1-x^2 \leq 1/4 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3}/2 \leq x \leq 1$$

In particolare $f(x) = 0$ per $x = \sqrt{3}/2$.

4.





Del triangolo isoscele OAB si conoscono il lato e la base. Per l'angolo α alla base si ricava dunque $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$, $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{(2/3)}$.
Applichiamo il teorema di Carnet al triangolo ABM :

$$AM^2 = 1 + 1/3 - 2\,(1/\sqrt{3})\cos(\alpha + \pi/3) = \ \ldots = \ 1 + \sqrt{(2/3)}\ .$$