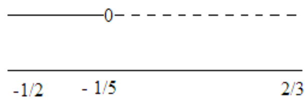
## Soluzioni

1.

( i ) C.E. $\dfrac{2-3x}{2x+1} > 0 \quad \leftrightarrow \quad -1/2 < x < 2/3$

( ii ) SGN $f(x) \geq 0$ se $\dfrac{2-3x}{2x+1} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1-5x}{2x+1} \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad -1/2 < x \leq -1/5$




( iii ) Per studiare l’invertibilità della funzione, consideriamo l’equazione f ( x ) = k :

$$\log \frac{2-3x}{2x+1} = k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2-3x}{2x+1} = e^k \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2-e^k}{3+2e^k}$$

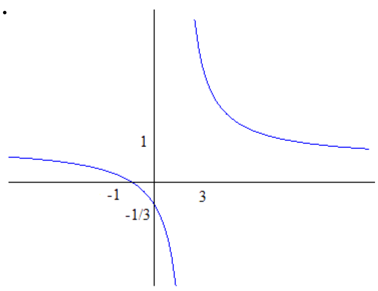
Imponiamo che la soluzione trovata stia nel C.E. della funzione :

$$-1/2 \leq \frac{2-e^k}{3+2e^k} \leq 2/3$$

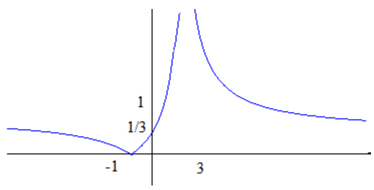
Le due disequazioni sono verificate per ogni valore di k .
In conclusione , la funzione data ha per immagine R , è invertibile e la sua inversa è

$$f^{-1}(k) = \frac{2-e^k}{3+2e^k} .$$

2.

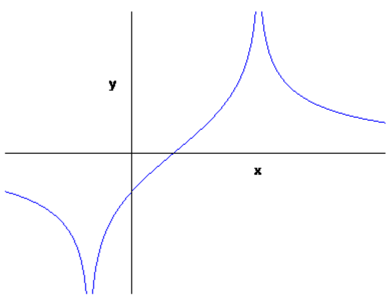



$y = \dfrac{x+1}{x-3}$

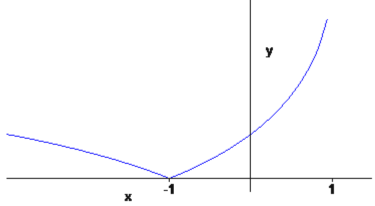



$y = \left|\dfrac{x+1}{x-3}\right|$

$y = \log\left|\dfrac{x+1}{x-3}\right|$



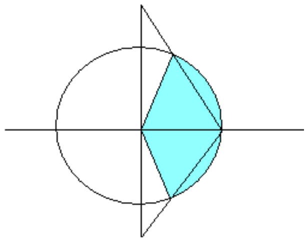

$y = \text{arcsen}\left|\dfrac{x+1}{x-3}\right|$



3.

( i ) $\quad \cos x = X \quad , \quad \operatorname{sen} x = Y$

$$\begin{cases} 3X + 2|Y| \geq 3 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y \geq 3(1-X)/2 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} Y \leq 3(X-1)/2 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



$$X^2 + 9/4\,(1 - X)^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$X = 1 \quad \text{oppure} \quad X = 5/13$$

$$-\arccos(5/13) \leq x \leq \arccos(5/13)$$

( ii ) $$\begin{cases} -x^2 + 4x - 3 \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \\ -x^2 + 4x - 3 < 4x^2 + 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x \geq -1/2 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$$

4.

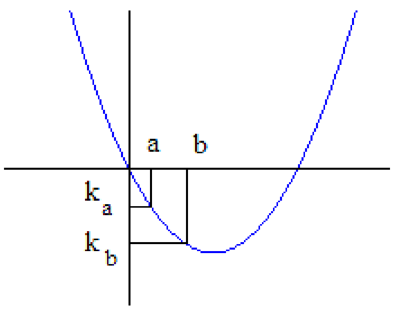
Posto sen$x = t$ , si ottiene

$$\begin{cases} t^2 - 2t - k = 0 \\ \sqrt{2}/2 \leq t \leq \sqrt{3}/2 \end{cases} .$$

Le soluzioni dell'equazione esistono se $k \geq -1$ e sono date da $t = 1 \pm \sqrt{k+1}$.
Dobbiamo imporre per tali soluzioni le condizioni assegnate: in questo modo si deduce che la soluzione con il segno + non è accettabile, mentre quella con il segno – lo è se

$$3/4 - \sqrt{3} \leq k \leq 1/2 - \sqrt{2} .$$

Per via grafica :




$a = \sqrt{2}/2 \qquad b = \sqrt{3}/2$

$k_a = 1/2 - \sqrt{2} \qquad k_b = 3/4 - \sqrt{3}$

5.

L'angolo $\beta$ è necessariamente acuto ( altrimenti il triangolo avrebbe due angoli non ottusi, essendo $\alpha = 2\beta$ ), dunque $\cos\beta > 0$. Dalla relazione fondamentale della trigonometria si ottiene

$$\cos\beta = \sqrt{33} / 7 .$$

Per quanto riguarda l'angolo $\alpha$, si ha :

$$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,2\beta = 2\,\text{sen}\,\beta\cos\beta = 8\sqrt{33} / 49$$

$$\cos\alpha = 17 / 49.$$

Infine, per l'angolo $\gamma = 180^0 - \alpha - \beta$, si ha :

$$\text{sen}\,\gamma = \text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta = 332/343$$

La misura dei lati si ottiene dal teorema dei seni :

$$\frac{BC}{8\sqrt{33} / 49} = \frac{AB}{332/343} = \frac{32}{4/7}$$

…..