Soluzioni

1.

C.E. $x \neq -1$

LIM per $x \to -1$ $\quad f(x) \to -1 + \pi/2$

punto di discontinuità eliminabile

per $x \to \pm\infty$ $\quad f(x) \sim x \to \pm\infty$

$f(x) - x \to 0^+$

$y = x$ asintoto obliquo ; il grafico si avvicina da sopra

DRV $\quad f'(x) = 1 - \dfrac{\operatorname{sgn}(x+1)}{(x+1)^2 + 1}$

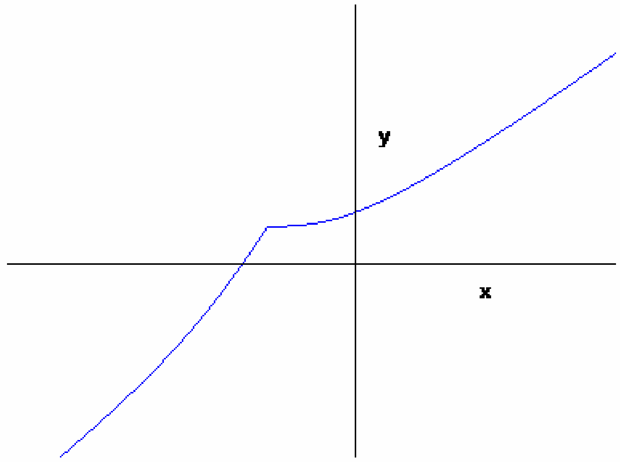
$$\begin{array}{ccc} 2 & \times & 0 \\ \hline & & \\ \hline & -1 & \end{array}$$

$x = -1$ punto angoloso

DRV2 $\quad f''(x) = \dfrac{2\,|x+1|}{\left[1 + (x+1)^2\right]^2}$

$$\begin{array}{ccc} & \times & \\ \hline & & \\ \hline & -1 & \end{array}$$

GRAFICO



2.

$$A = \int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1}\, dx$$

- Per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim 1/x$: l'integrale non esiste finito
- $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}\,dx = x \operatorname{arctg}\frac{1}{x+1} + \int \frac{x}{(x+1)^2+1}\,dx =$

$$= x \operatorname{arctg}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)-2}{(x+1)^2+1}\,dx =$$

$$= x \operatorname{arctg}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\log((x+1)^2+1) - \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$

$$= x \operatorname{arctg}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\log((x+1)^2+1) - \operatorname{arctg}(x+1) + c .$$

Per $x \to +\infty$ $\quad x \operatorname{arctg}\frac{1}{x+1} \sim \frac{x}{x} \to 1$

$$\frac{1}{2}\log((x+1)^2+1) \to +\infty$$

$$-\operatorname{arctg}(x+1) \to -\pi/2$$

L'integrale non esiste finito.

3.

$\operatorname{sen} x = x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^5)$

$\text{sen}(\text{sen}\, x) = (x - x^3/6 + x^5/120) - (x^3 - x^5/2)/6 + x^5/120 + o(x^5) =$
$= x - x^3/3 + x^5/10 + o(x^5)$

$\text{arctg}\, x = x - x^3/3 + x^5/5 + o(x^5)$

$$f(x) \sim \frac{-x^5/10}{\pi x^5/2} \to -1/5\pi$$

4.

Soluzioni dell'equazione $y(x) = c\, e^{-kx} + 1/k$
Soluzione problema $y_k(x) = (1 - e^{-kx})/k$

Se $k < 0$ per $x \to +\infty$ $y_k(x) \to +\infty$
e dunque la condizione richiesta dal problema non può essere verificata

Se $k > 0$ per $x \to +\infty$ $y_k(x) \to 1/k$, $y_k(0) = 0$, $y_k'(x) = e^{-kx} > 0$
Dunque in $[0, +\infty)$ $\sup f = 1/k$; la condizione del problema è verificata se $k > 0$, $1/k < 10$, cioè se $k > 10$.