Soluzioni

1.

(a)

C.E. $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \ , \ x \ne 0 \\ \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{|x|} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \ , \ x \ne 0 \\ 1 - x^2 \le x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ x \in [-1 , -1/\sqrt{2}] \ \cup [1/\sqrt{2} , 1]$$

SIMMETRIE La funzione è pari .

(b)

Studiamo la funzione in $[1/\sqrt{2} , 1]$.

$$f(x) = k \in [-\pi/2 , \pi/2] \ \leftrightarrow \ \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = \operatorname{sen} k \ , \ k \in [0 , \pi/2] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 1 - x^2 = x^2 \operatorname{sen}^2 k \ \leftrightarrow \ x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 k}} .$$

Dunque :

la funzione ha come immagine $[0 , \pi/2]$, è invertibile e $f^{-1}(k) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 k}}$.

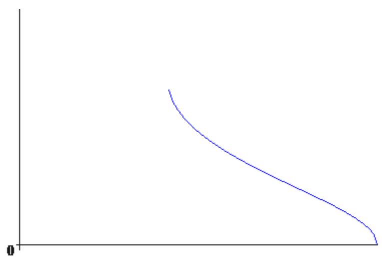
(c)

Nell'intervallo considerato si può riscrivere la funzione nella forma $\operatorname{arcsen} \sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 1}$; la funzione x^{-2} è decrescente e tale rimane se le sottraiamo la costante 1; le funzioni radice ed arcoseno conservano la monotonia. In conclusione, la funzione data è decrescente.

(d)

Per disegnare il grafico della funzione, basta utilizzare i risultati sopra stabiliti e cioè :

$$f : [1/\sqrt{2} , 1] \to [0 , \pi/2] \ , f \text{ decrescente} \ , \ f(1/\sqrt{2}) = \pi/2 \ , \ f(1) = 0 .$$



2.

(a) $\dfrac{|x+1|}{x-2} \le 1 \iff x < 2$ opp. $\begin{cases} x > 2 \\ x^2 + 2x + 1 \le x^2 - 4x + 4 \end{cases} \iff$

$\iff x < 2$ opp. $\begin{cases} x > 2 \\ x \le 1/2 \end{cases} \iff x < 2$

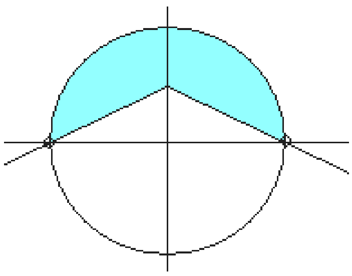
$\sqrt{|x-1|} \ge x \iff x < 0$ opp. $\begin{cases} x \ge 0 \\ |x-1| \ge x^2 \end{cases} \iff$

$\iff x < 0$ opp. $\begin{cases} x \ge 0 \\ x-1 \ge x^2 \end{cases}$ opp $\begin{cases} x \ge 0 \\ x-1 \le -x^2 \end{cases} \iff x \le (\sqrt{5}-1)/2$

$A = (-\infty, 2)$, $B = (-\infty, (\sqrt{5}-1)/2)$

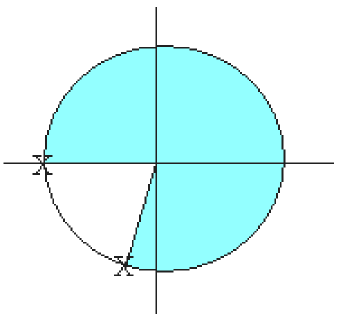
$A \cup B = A$ $A \cap B = B$ $A - B = ((\sqrt{5}-1)/2, 2)$

(b) $2 \operatorname{sen} x + |\cos x| - 1 \ge 0 \iff 2Y + |X| - 1 \ge 0 \iff 2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi$

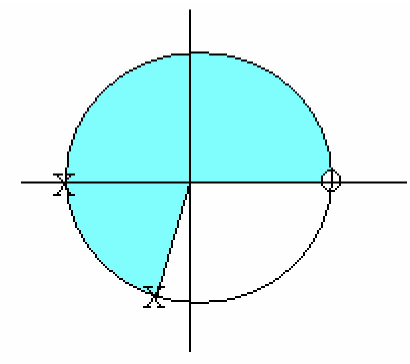


$2 \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \sqrt{3} > 0 \iff 3 \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + \sqrt{3} > 0 \iff$

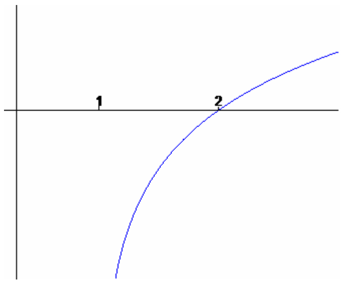
$\iff -\pi/3 + k\pi < x/2 < \pi/2 + k\pi \iff -2\pi/3 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$



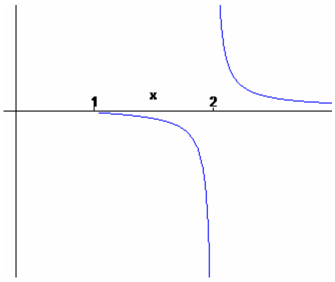
La disequazione è verificata per $2\,k\,\pi \le x < \pi + 2\,k\,\pi$ opp. $\pi + 2\,k\,\pi < x < 4\,\pi / 3 + 2\,k\,\pi$



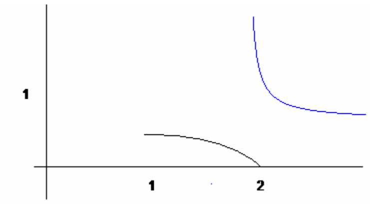
3.



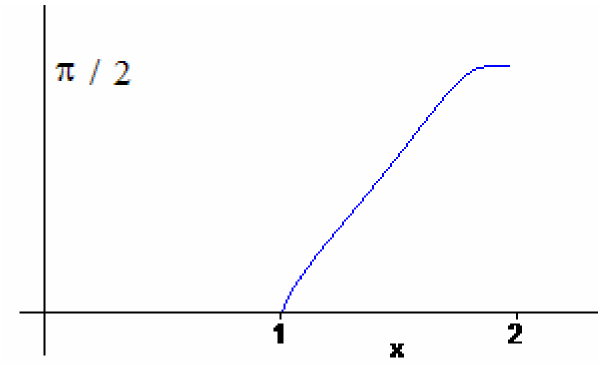
$y = \log(x - 1)$



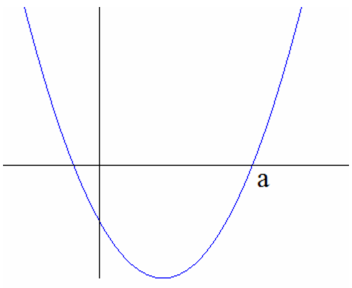
$y = 1 / \log(x - 1)$



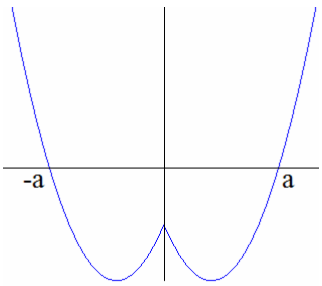
$y = 2^{1 / \log(x - 1)}$



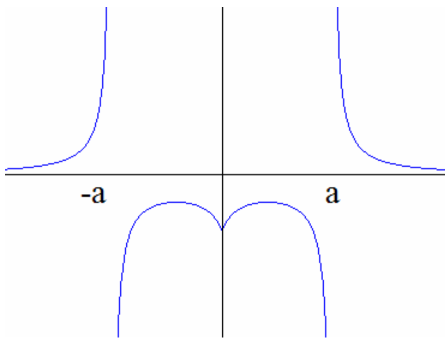
$y = \arccos 2^{1 / \log(x - 1)}$



$y = x^2 - 2x - 1$

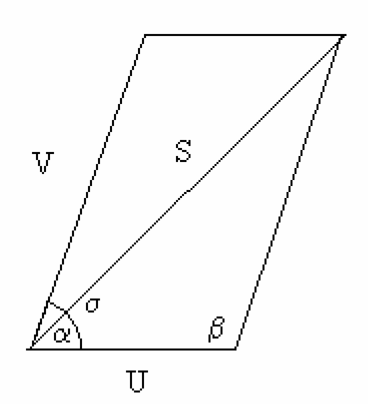


$y = x^2 - 2\,|x| - 1$



$y = 1 / (x^2 - 2\,|x| - 1)$

4.



Applichiamo in entrambi i casi il teorema di Carnot :

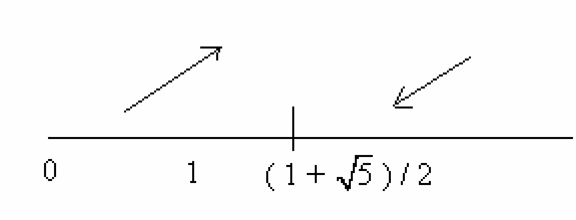
$V^2 = S^2 + U^2 - 2\ S\ U \cos\alpha \ \rightarrow$
$\cos\alpha \ = \ 0{,}5275 \ \rightarrow \ \alpha \ = \ 58^o\ 9'\ 48''$

$S^2 = U^2 + V^2 - 2\ U\ V \cos\beta \ \rightarrow$
$\cos\beta \ = \ -0{,}032353 \ \rightarrow \ \beta \ = \ 91^o\ 51'\ 14'' \ \rightarrow \ \alpha \ = \ 88^o\ 8'\ 46''$

5.

La successione è ben definite ed è positiva.

$x_{n+1} \geq x_n \ \Leftrightarrow \ \sqrt{1 + x_n} \ \geq \ x_n \ \Leftrightarrow \ 0 < x_n \ \leq \ (1 + \sqrt{5}) / 2$



Proviamo per induzione che è sempre $x_n < (1 + \sqrt{5}) / 2$.
Al passo iniziale la condizione è verificata.
Supponiamola verificata al passo n e deduciamola per il passo n+1 :

$\sqrt{1 + x_n} < (1 + \sqrt{5}) / 2 \ \Leftrightarrow \ 1 + x_n \ < \ (3 + \sqrt{5}) / 2 \ \Leftrightarrow \ x_n \ < \ (1 + \sqrt{5}) / 2$.

La successione risulta dunque crescente.

1.

(a)

C.E. $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ \dfrac{|x|}{\sqrt{1-x^2}} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x^2 \le 1 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ x \in [-1/\sqrt{2}\ ,\ 1/\sqrt{2}\,]$

SIMMETRIE La funzione è dispari .

(b)

Studiamo la funzione in $[\,0\ ,\ 1/\sqrt{2}\,]$.

$f(x) = k \in [-\pi/2, \pi/2] \ \leftrightarrow\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{sen} k\ ,\ k \in [\,0, \pi/2\,] \leftrightarrow$

$\leftrightarrow\ x^2 = \operatorname{sen}^2 k - x^2 \operatorname{sen}^2 k \ \leftrightarrow\ x = \dfrac{\operatorname{sen} k}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 k}}$.

Dunque :

la funzione ha come immagine $[\,0, \pi/2\,]$, è invertibile e $f^{-1}(k) = \dfrac{\operatorname{sen} k}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 k}}$.

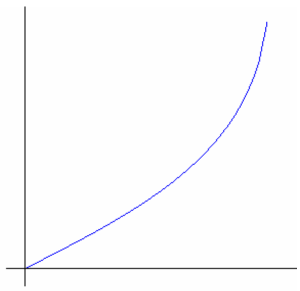
(c)

Nell'intervallo considerato si può riscrivere la funzione nella forma arcsen $\sqrt{\dfrac{1}{1-x^2} - 1}$; la funzione $1 - x^2$ è decrescente e quindi $1/(1-x^2)$ è crescente; tale rimane se le sottraiamo la costante 1; le funzioni radice ed arcoseno conservano la monotonia. In conclusione, la funzione data è crescente.

(d)

Per disegnare il grafico della funzione, basta utilizzare i risultati sopra stabiliti e cioè :

$f : [\,0, 1/\sqrt{2}\,] \to [\,0, \pi/2\,]$, f decrescente , $f(0) = 0$, $f(1/\sqrt{2}) = \pi/2$.



2.

(a) $\dfrac{|x-2|}{x+1} \le 1 \iff x < -1$ opp. $\begin{cases} x > -1 \\ x^2 - 4x + 4 \le x^2 + 2x + 1 \end{cases} \iff$

$\iff x < -1$ opp. $\begin{cases} x > -1 \\ x \ge 1/2 \end{cases} \iff x < -1$ opp. $x \ge 1/2$

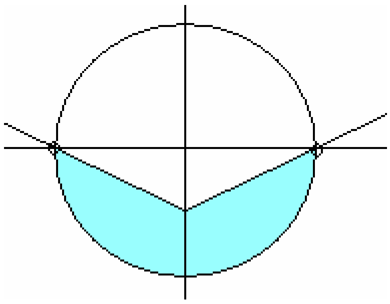
$\sqrt{|x+1|} \le x \iff \begin{cases} x \ge 0 \\ |x+1| \le x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge 0 \\ x+1 \le x^2 \\ x+1 \ge -x^2 \end{cases} \iff$

$\iff x \ge (\sqrt{5}+1)/2$

$A = (-\infty, -1] \cup [1/2, +\infty)$, $B = [(\sqrt{}5 - 1)/2), +\infty)$

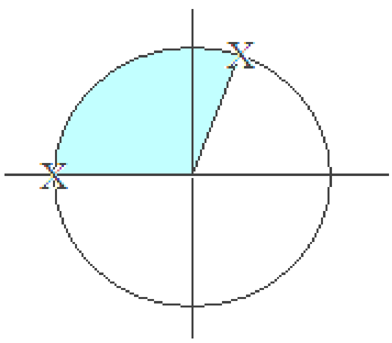
$A \cup B = A$ $A \cap B = B$ $A - B = (-\infty, -1) \cup [1/2, (\sqrt{5}+1)/2)$

(b) $|\cos x| - 2 \operatorname{sen} x - 1 \ge 0 \iff |X| - 2Y - 1 \ge 0 \iff \pi + 2k\pi \le x \le 2\pi + 2k\pi$

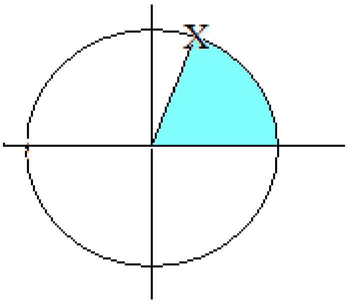


$2 \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} - \sqrt{3} > 0 \iff 3 \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} > \sqrt{3} \iff$

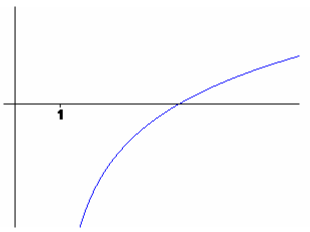
$\iff \pi/6 + k\pi < x/2 < \pi/2 + k\pi \iff \pi/3 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$



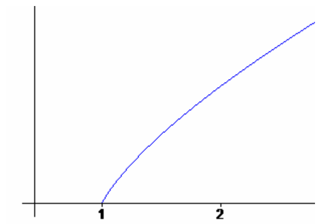
La disequazione è verificata per $2k\pi \leq x < \pi/3 + 2k\pi$.



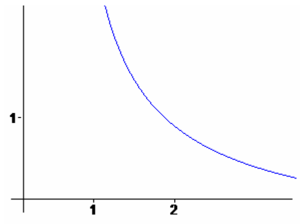
3.



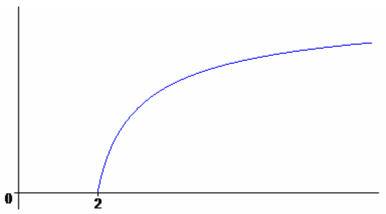
$y = \log(x-1)$



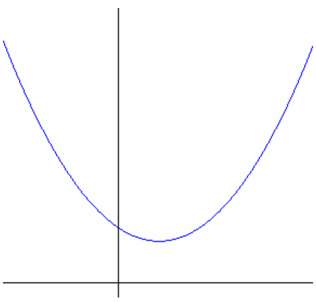
$y = 2^{\log(x-1)}$



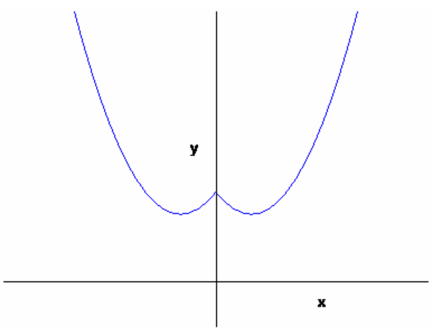
$y = 1 / 2^{\log(x-1)}$



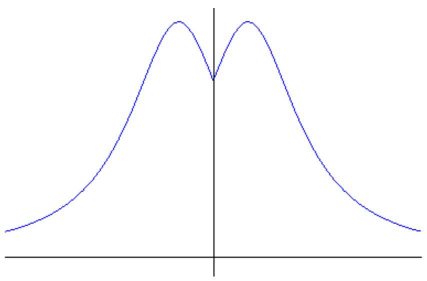
$y = \arccos 1 / 2^{\log(x-1)}$



$y = x^2 - x + 1$

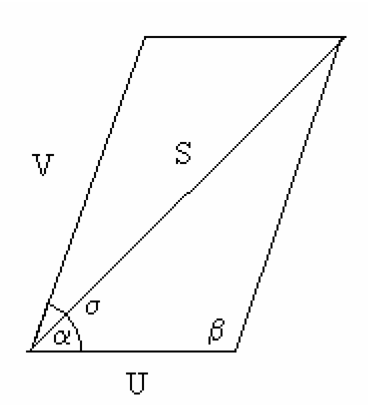


$y = x^2 - |x| + 1$



$y = 1 / (x^2 - |x| + 1)$

4.



Applichiamo in entrambi i casi il teorema di Carnot :

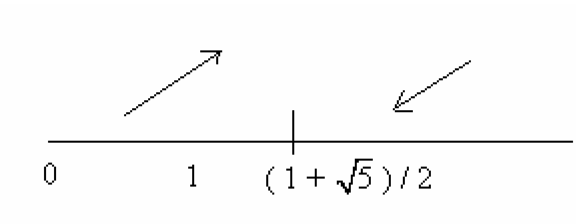
$V^2 = S^2 + U^2 - 2\, S\, U \cos\alpha \;\rightarrow$
$\cos\alpha \;=\; 0{,}625 \;\rightarrow\; \alpha \;=\; 51^{o}\, 19'\, 4''$

$S^2 = U^2 + V^2 - 2\, U\, V \cos\beta \;\rightarrow$
$\cos\beta \;=\; -\, 0.35 \;\rightarrow\; \beta \;=\; 110^{o}\, 29'\, 14'' \;\rightarrow\; \alpha \;=\; 69^{o}\, 30'\, 46''$

5.

La successione è ben definite ed è positiva.

$x_{n+1} \geq x_n \;\Leftrightarrow\; \sqrt{1 + x_n} \;\geq\; x_n \;\Leftrightarrow\; 0 < x_n \;\leq\; (1 + \sqrt{5}\,)/2$



Proviamo per induzione che è sempre $x_n > (1 + \sqrt{5}\,)/2$.
Al passo iniziale la condizione è verificata.
Supponiamola verificata al passo n e deduciamola per il passo n+1 :

$\sqrt{1 + x_n} > (1 + \sqrt{5}\,)/2 \;\;\Leftrightarrow\;\; 1 + x_n \;>\; (3 + \sqrt{5}\,)/2 \;\;\Leftrightarrow\;\; x_n \;>\; (1 + \sqrt{5}\,)/2$.

La successione risulta dunque decrescente.