Istituzioni di Matematiche I
Prova scritta del 7. 02. 08

Soluzioni

1.

Poiché $-x^2 + x + 2 = (2 - x)(x + 1)$, l'integrale è improprio a causa dell'estremo 2.
L'integrale esiste perché per $x \to 2$ la funzione è un infinito di ordine ½ , essendo $f(x) \sim 2 / \sqrt{3(2 - x)}$.
Per calcolare le primitive, utilizziamo il metodo del completamento del quadrato : essendo $x^2 - x - 2 = (x - ½)^2 - 9/4$, per l'integrale si ottiene

$$\int \frac{x}{\sqrt{9/4 - (x - 1/2)^2}}\, dx = \int \frac{2x}{3\sqrt{1 - ((2x - 1)/3)^2}}\, dx$$

Poniamo $(2x - 1)/3 = t$ e dunque $x = (1 + 3t)/2$, $dx = 3/2\, dt$:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1 + 3t}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} + \frac{3}{2}\int \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt =$$

$$\frac{1}{2}\,\text{arcsen}\, t - \frac{3}{2}\sqrt{1 - t^2} + c =$$

$$\frac{1}{2}\,\text{arcsen}\left(\frac{2x - 1}{3}\right) - \frac{3}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{2x - 1}{3}\right)^2} + c$$

$$\frac{1}{2}\,\text{arcsen}\left(\frac{2x - 1}{3}\right) - \sqrt{-x^2 + x + 2} + c \ .$$

Concludendo i calcoli, l'integrale dato vale $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,\text{arcsen}\,\frac{1}{3} + \sqrt{2}$.

2.

C.E.

$$\sqrt{\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right|} \le 1 \iff \begin{cases} 1 + 2x + x^2 \le 1 - 2x + x^2 \\ x \ne 1 \end{cases} \iff x \le 0$$

SGN

La funzione è sempre positiva , eccetto che per $x = 0$ per cui si annulla

LIM

Per $x \to -\infty$ $\quad f(x) \to 0$ $\quad$ (asintoto orizzontale)

$f(-1) = \pi / 2$

DRV

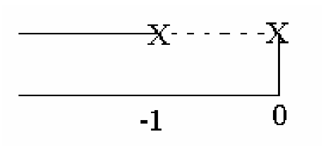
$$-\frac{1}{\sqrt{1-\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}}\ \frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{1-x}{1+x}\right|}\ \mathrm{sgn}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$$-\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x-|1+x|}}\ \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{|1+x|}}\ \mathrm{sgn}(1+x)\ \frac{1}{(1-x)^2}$$

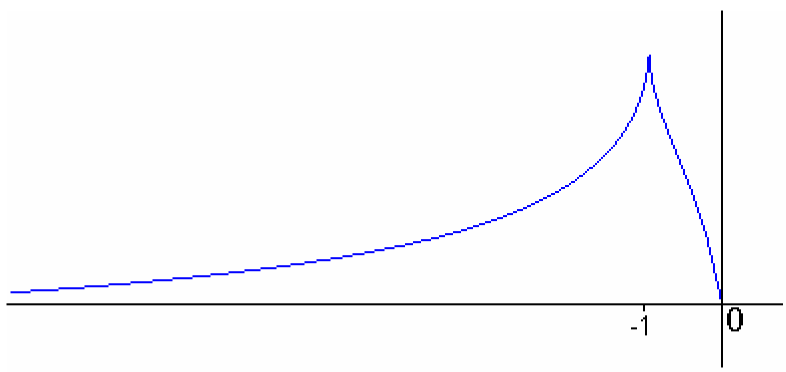
$$-\frac{\mathrm{sgn}(1+x)}{\sqrt{1-x-|1+x|}\ \sqrt{|1+x|}\ (1-x)} \qquad \text{per } x \neq 0 \ ,\ x \neq 1$$

$x = 0$ punto a tangente verticale , $x = 1$ punto a cuspide

segno della derivata



GRAFICO



3.

Per il polinomio caratteristico $k^4 - 3\,k^2 - 4$ si deduce che deve essere $k^2 = 4$ oppure $k^2 = -1$ e quindi le sue radici sono $k = \pm 2$, $k = \pm i$; da queste si deduce che le funzioni e^{2x}, e^{-2x} , cosx , senx formano una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata.
Per trovare una soluzione particolare dell'equazione completa, passiamo in campo complesso sostituendo il termine noto con e^{ix} . Poiché i è radice del polinomio caratteristico, cerchiamo una soluzione della forma $A\,x\,e^{ix}$. Calcolando le derivate successive e sostituendo nell'equazione, si deduce che deve essere $A = i/10$. Della soluzione complessa così ottenuta dobbiamo considerare la parte immaginaria, ottenendo in questo modo la soluzione reale $x \cos x / 10$.
L'integrale generale dell'equazione data è dunque :

$$y(x) = \frac{1}{10}\, x \cos x + A\, e^{2x} + B\, e^{-2x} + C \cos x + D \operatorname{sen} x .$$

4.

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x} + \frac{\cos x}{x}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x} - \frac{\cos x}{x}\right) = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}x} + \frac{\cos x}{x}\right)\frac{x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2x}{x \operatorname{sen}x} \sim$$

$$\frac{2}{x} \cdot \frac{x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2x}{x^2} = \frac{2x - \operatorname{sen}2x}{x^3} \sim \frac{\frac{1}{6}(2x)^3}{x^3} \to \frac{4}{3}$$

5.

La serie è definita se l'argomento del logaritmo è maggiore di 0 e questo accade se $x < 0$. Per tali valori di x , la successione e^{nx} tende a 0 e dunque

$$a_n \sim \frac{1 - e^{nx}}{1 + e^{nx}} - 1 = \frac{-2\, e^{nx}}{1 + e^{nx}} \sim -2\, e^{nx} = -2\,(e^x)^n .$$

La serie data è dunque equivalente ad una serie geometrica di ragione e^x convergente perché $0 < e^x < 1$.