Soluzioni

1. Da $y(x) = x\,z(x)$ segue $y'(x) = z(x) + x\,z'(x)$. Sostituendo nell'equazione, si ottiene $z' = \dfrac{1+z^2}{x}$ (che è a variabili separate) con la C.I. $z(1) = 1$. Risolvendo nel modo consueto:

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \operatorname{arctg} z = \lg x + c$$

(si ricordi che stiamo studiando l'equazione nel caso $x > 0$). La C.I. è verificata per $c = \pi/4$. Dunque:

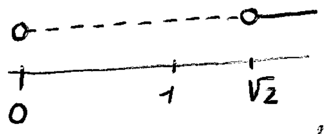
$$\operatorname{arctg} z = \lg x + \pi/4 \Rightarrow z = \operatorname{tg}\left(\lg x + \pi/4\right)$$

con la condizione che sia $-\pi/2 < \lg x + \pi/4 < \pi/2$, cioè $e^{-3\pi/4} < x < e^{\pi/4}$.
Ritornando alla variabile y: $y(x) = x\,\operatorname{tg}(\lg x + \pi/4)$ nell'intervallo trovato.

2. La funzione $f(x) = |x|\left(\sqrt{|1-x^2|} - 1\right)$ è pari; possiamo dunque limitarci a studiarla per $x \geq 0$, scrivendola nella forma $f(x) = x\left(\sqrt{|1-x^2|} - 1\right)$.

C.E. $x \geq 0$ (v. osservazione precedente)

SGN $f(0) = 0$; per $x > 0$ è $f(x) \geq 0 \iff \sqrt{|1-x^2|} \geq 1 \iff x \geq \sqrt{2}$



LIM per $x \to +\infty$ $f(x) \sim x^2 \to +\infty$ senza asintoto

DRV $f'(x) = \sqrt{|1-x^2|} - 1 - \dfrac{x^2}{\sqrt{|1-x^2|}}\operatorname{sgn}(1-x^2) \geq 0 \iff$

$|1-x^2| - \sqrt{|1-x^2|} - x^2 \operatorname{sgn}(1-x^2) \geq 0$

Si osservi che $x = 1$ è una cuspide.

(i) $0 \leq x < 1$

$\sqrt{1-x^2} \leq 1 - 2x^2 \iff \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 1-2x^2 \geq 0 \\ 1-x^2 \leq 1-4x^2+4x^4 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq x \leq 1/\sqrt{2} \\ x^2(4x^2-3) \geq 0 \end{cases}$

nell'intervallo $[0,1)$ la derivata è negativa (nulla per $x = 0$)

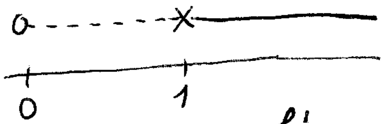
(ii) $x > 1$

$\sqrt{x^2-1} \leq 2x^2 - 1 \iff \begin{cases} x > 1 \\ x^2-1 \leq 4x^4-4x^2+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ 4x^4-5x^2+2 \geq 0 \end{cases}$

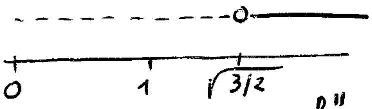
nell'intervallo $(1, +\infty)$ la derivata è positiva

DRV² $f''(x) = -\dfrac{x\operatorname{sgn}(1-x^2)}{\sqrt{|1-x^2|}} - \dfrac{2x-x^3}{|1-x^2|^{3/2}} \geq 0 \iff$

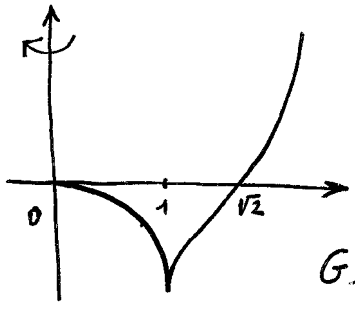
$2x^3 - 3x \geq 0$



f'



f''



G_f

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - 1\right) \sim -\frac{1}{2n^3}$$; la serie converge.

3. La funzione è discontinua in $x=0$; per $x \to 0$ $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$: l'integrale esiste.
Per calcolarne il valore, si pone

$$\sqrt{\frac{e^x}{e^x-1}} = t \quad \Rightarrow \quad x = \lg \frac{t^2}{t^2-1}, \quad dx = -\frac{2}{t(t^2-1)}\, dt$$

$$y = \int_{\sqrt{e/e-1}}^{+\infty} \frac{2}{t^2-1}\, dt = \int_{\sqrt{e/e-1}}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= \left[\lg \left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{\sqrt{e/e-1}}^{+\infty} = \lg \frac{\sqrt{e}+\sqrt{e-1}}{\sqrt{e}-\sqrt{e-1}} .$$

4. $$\lg(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)} x^{n+1}$$

$$\lg \frac{3}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k\, 2^k} + \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1} 2^{n+1} (n+1)} \qquad 0 < \xi < \frac{1}{2}$$

$$|E| \leq \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} < \frac{1}{100} \quad \text{per } n \geq 4$$

Per $n=4$ $\lg \frac{3}{2} \sim 0{,}40$ per difetto.