# Soluzioni [1]

1. (a) $\forall M>0, \exists \bar{n}\in\mathbb{N}: x_{\bar{n}}>M$ , (b) $\forall M>0, \exists \bar{n}\in\mathbb{N}: \forall n>\bar{n},\ x_n>M$.

(a) $\not\Rightarrow$ (b) : ad esempio $x_n=(-1)^n n$.

2. $e^{2x-\alpha x^2} = 1+(2x-\alpha x^2)+\frac{1}{2}(4x^2)+o(x^2) = 1+2x+(2-\alpha)x^2+o(x^2)$

$\operatorname{sen} 2x = 2x+o(x^2)$

$\sqrt{1-\alpha x^2} = 1-\frac{1}{2}\alpha x^2+o(x^2)$

$f(x) = \left(2-\frac{\alpha}{2}\right)x^2+o(x^2)$.

Dunque, se $\alpha\neq 4$ la fz. è infinitesima di ordine 2.
Se $\alpha=4$ le approssimazioni precedenti sono insufficienti: approssimiamo le fz. al terzo ordine:

$e^{2x-4x^2} = 1+(2x-4x^2)+\frac{1}{2}(4x^2-16x^3)+\frac{1}{6}(8x^3)+o(x^3)$

$\operatorname{sen} 2x = 2x-\frac{8}{6}x^3+o(x^3)$

$\sqrt{1-4x^2} = 1-2x^2+o(x^3)$.

$f(x) = -\frac{16}{3}x^3+o(x^3)$.

3. C.E. $x\neq 0$

SGN sempre $>0$

LIM $x\to 0$ $f(x)\sim \frac{x}{2x}\to\frac{1}{2}$ d. elim.

$x\to+\infty$ $f(x)\sim x\to+\infty$

$f(x)-x = \frac{x}{e^{2x}-1}\to 0^+$

$y=x$ as. obliquo

$x\to-\infty$ $f(x)\sim -x e^{2x}\to 0^+$

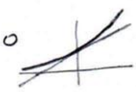
$y=0$ as. orizzontale

DRV $f'(x) = \frac{(e^{2x}-1-2x)\,e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

$x\to 0$ $f'(x)\sim\frac{2x^2}{4x^2}\to\frac{1}{2}$

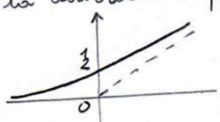
$f'(0)=\frac{1}{2}$

Poichè $e^t>1+t\ \forall t\neq 0$



la derivata è positiva

$G_f$




4. Per $x\to 1^-$, $f(x)\sim\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}}$

Infinito di ordine $\frac{1}{2}$ $\to$ integrabile

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \underset{\substack{1-x^2=t\\ x\,dx=-\frac{1}{2}dt}}{=} \frac{1}{2}\int_0^1\frac{1-t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{t}-\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

5. Cerchiamo un'eq. diff. lineare del II ordine a coeff. costanti $y''+ay'+by=f(x)$. Il polinomio caratteristico deve avere come radici $\pm 1$; sarà dunque $K^2-1$, che fornisce $a=0, b=-1$ nell'eq. ($y''-y=f(x)$). Imponiamo che $-\operatorname{sen} x$ risolva l'eq.; si ottiene che deve essere $f(x)=2\operatorname{sen} x$. In conclusione: $y''-y=2\operatorname{sen} x$.
La fz. $\bar{y}(x)=e^x-\operatorname{sen} x$ è una soluzione e verifica $\bar{y}(0)=1$, $\bar{y}'(0)=0$: queste sono C.I. che individuano $\bar{y}(x)$ come soluzione unica del pb.

Soluzioni [2]

Riportiamo i dettagli significativi; per il resto rimandiamo a [1].

1. (a) $\forall M>0,\ \exists \bar{n}\in\mathbb{N}:\ x_{\bar{n}}<-M$ (b) $\forall M>0,\ \exists \bar{n}\in\mathbb{N}:\ \forall n>\bar{n},\ x_n<-M$

$(a) \not\Rightarrow (b)$ ; es.: $(-1)^n n$.

2. $f(x) = \left(2-\frac{\alpha}{2}\right)x^2 + o(x^2)$ , se $\alpha \neq 4$.

Se $\alpha = 4$, $f(x) = \frac{16}{3}x^3 + o(x^3)$.

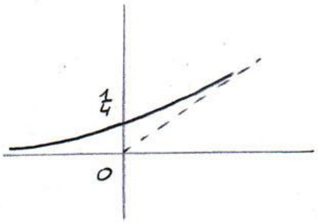
3. $f(0) = \frac{1}{4}$ come prolung. continuo

$y = x$ as. obliquo per $x \to +\infty$

$y = 0$ as. orizz. per $x \to -\infty$

$$f'(x) = \frac{(e^{4x}-1-4x)\,e^{4x}}{(e^{4x}-1)^2}, \quad x \neq 0$$

$f'(0) = \frac{1}{2}$




4. Per $x \to 2^-$ $f(x) \sim \dfrac{8}{\sqrt{4(2-x)}} = \dfrac{4}{\sqrt{2-x}}$

Ponendo $4-x^2 = t$, $x\,dx = -\frac{1}{2}\,dt$ :

$$\frac{1}{2}\int_0^4 \frac{4-t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\left[8\sqrt{t} - \frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

5. $y'' - 4y = -5 \,\mathrm{sen}\, x$

$y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$