Soluzioni [A]

1 Studiare le principali proprietà e tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x + \frac{\log|x|}{|x|} .$$

C.E. $x \neq 0$

LIMITI per $x \to 0$ $f(x) \to -\infty$

per $x \to \pm\infty$ $f(x) \to \pm\infty$

la retta $y = x$ è asintoto ; la funzione si avvicina all'asintoto da sopra

DERIVATA $f'(x) = \dfrac{x^2 + (\operatorname{sgn} x)(1 - \log|x|)}{x^2}$

Per ottenere il segno della derivata, occorre ricavare graficamente quello della funzione al numeratore.

$\phi(x) = x^2 + (\operatorname{sgn} x)(1 - \log|x|)$

per $x \to 0^{\pm}$ $\phi(x) \to \pm\infty$

per $x \to \pm\infty$ $\phi(x) \to +\infty$

$\phi'(x) = \dfrac{2x^2 - \operatorname{sgn} x}{x}$

- - - - X - - - - - - 0 ________

0 $1/\sqrt{2}$

segno di Φ'

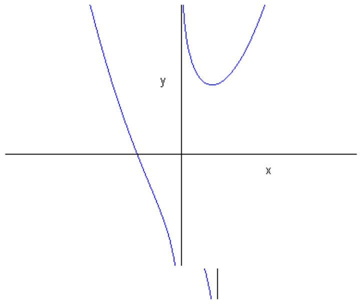


Grafico di $\phi (x)$

segno di f ‘ (x)   ______0---------X________

____

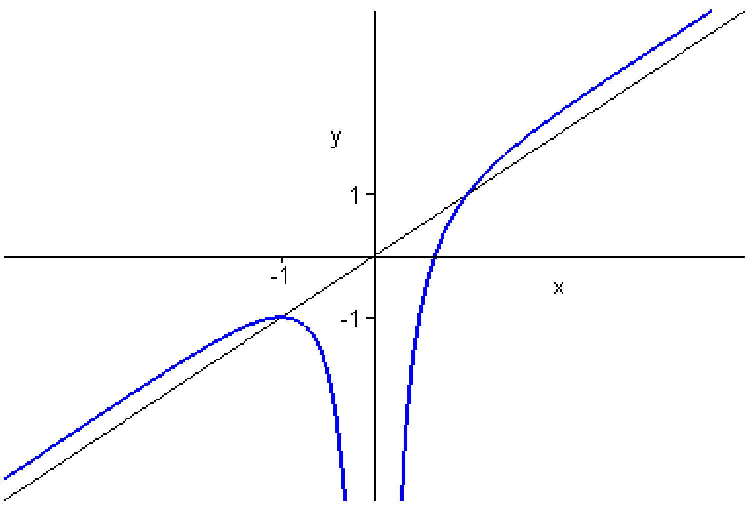
-1   0

$$f''(x) = \frac{(\operatorname{sgn} x)(2 \log|x| - 3)}{x^3}$$

segno di f” (x)   ______0---------X---------0____

____

$-e^{3/2}$ 0 $e^{3/2}$



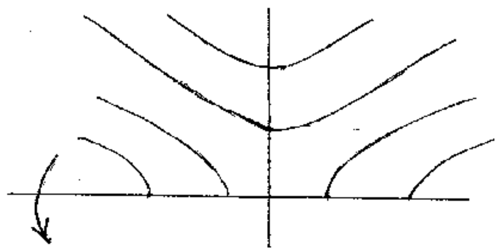
2. Studiare l'equazione differenziale $y' = \dfrac{x^5}{y\,e^{y^2}}$

C.E. $x \in R$, $y \neq 0$

Se y (x) è soluzione, anche – y (x) lo è; possiamo limitarci a studiare le soluzioni positive

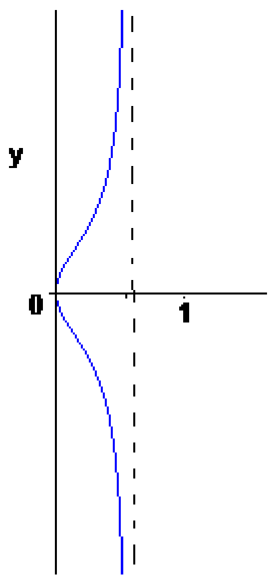
$$\int y\,e^{y^2} dy = \int x^5\,dx \quad \Rightarrow \frac{e^{y^2}}{2} = \frac{x^6 + c}{6} \quad \Rightarrow y = \sqrt{\log \frac{x^6 + c}{3}}$$

Deve essere $\dfrac{x^6 + c}{3} > 1 \;\Rightarrow x^6 > 3 - c \Rightarrow x \in R$ se $c > 3$, $|\,x\,| > \sqrt[6]{3 - c}$ se $c \leq 3$.



3. Area della regione di piano descritta dalla condizione $y^2 \leq \dfrac{x}{1 - x}$.

Area = $2 \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1 - x}}\,dx$



Si pone $\sqrt{\dfrac{x}{1 - x}} = t \;\rightarrow\; x = \dfrac{t^2}{1 + t^2}$, $dx = \dfrac{2\,t}{(1 + t^2)^2}\,dt$

Area = $4 \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1 + t^2)^2}\,dt$

$$\frac{t^2}{(1 + t^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + t^2} - \left(\frac{t}{1 + t^2} \right)' \right)$$

Area = $2 \left[\operatorname{arctgt} - \dfrac{t}{1 + t^2} \right]_0^{+\infty} = \pi$

Soluzioni [B]

1 Studiare le principali proprietà e tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x - \frac{\log|x|}{|x|} \ .$$

C.E. $\quad x \neq 0$

LIMITI $\quad$ per $x \to 0$ $\quad f(x) \to +\infty$

per $x \to \pm\infty$ $\quad f(x) \to \pm\infty$

la retta $y = x$ è asintoto ; la funzione si avvicina all'asintoto da sotto

DERIVATA $\quad f'(x) = \dfrac{x^2 - (\operatorname{sgn} x)(1 - \log|x|)}{x^2}$

Per ottenere il segno della derivata, occorre ricavare graficamente quello della funzione al numeratore.

$\phi(x) = x^2 - (\operatorname{sgn} x)(1 - \log|x|)$

per $x \to 0^{\pm}$ $\quad \phi(x) \to \mp\infty$

per $x \to \pm\infty$ $\quad \phi(x) \to +\infty$

$\phi'(x) = \dfrac{2x^2 + \operatorname{sgn} x}{x}$

- - - - - - 0 ———————— X ————————

$-1/\sqrt{2}$ $\qquad$ 0

segno di Φ'

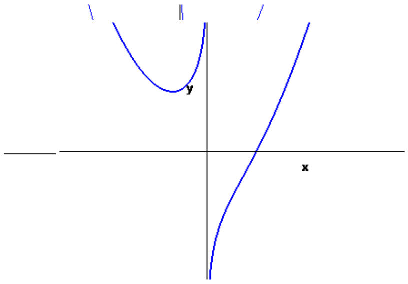


Grafico di ϕ (x)

segno di f ' (x)

—— X - - 0 ——

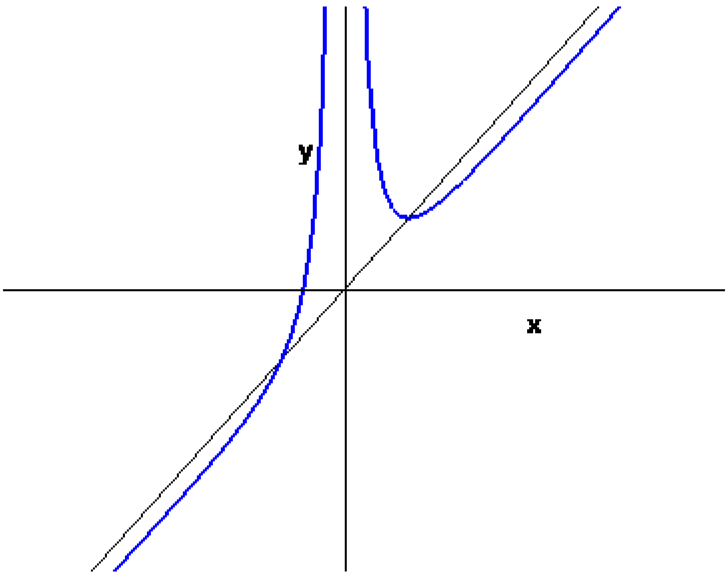
0 1

$$f''(x) = \frac{(\operatorname{sgn} x)(3 - 2\log|x|)}{x^3}$$

segno di f" (x)

- - - 0 —— X —— 0 - - -

$-e^{3/2}$ 0 $e^{3/2}$



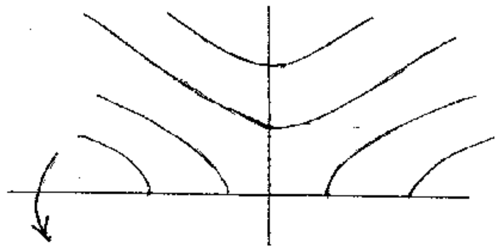
2. Studiare l'equazione differenziale $y' = \dfrac{x^3}{y\, e^{y^2}}$

C.E. $\quad x \in R \;,\; y \neq 0$

Se y (x) è soluzione, anche – y (x) lo è; possiamo limitarci a studiare le soluzioni positive

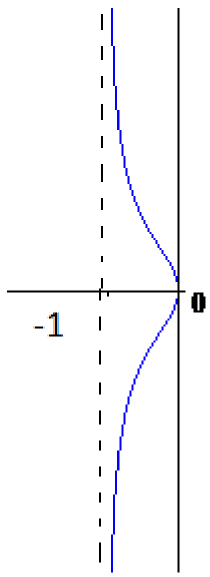
$$\int y\, e^{y^2} dy = \int x^3\, dx \quad \Rightarrow \frac{e^{y^2}}{2} = \frac{x^4 + c}{4} \quad \Rightarrow y = \sqrt{\log \frac{x^4 + c}{2}}$$

Deve essere $\frac{x^4 + c}{2} > 1 \;\Rightarrow x^4 > 2 - c \Rightarrow x \in R \;\; \text{se}\, c > 2 \;\;,\; |\, x \,| > \sqrt[4]{2 - c} \;\; \text{se}\, c \leq 2.$



3. Area della regione di piano descritta dalla condizione $y^2 \leq \frac{-x}{1+x}$.

Area = $2 \int_{-1}^{0} \sqrt{\frac{-x}{1+x}}\, dx$



Si pone $\sqrt{\frac{-x}{1+x}} = t \;\rightarrow\; x = \frac{-t^2}{1+t^2} \;,\; dx = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\, dt$

Area = $4 \int_{0}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\, dt$

$$\frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \left(\frac{t}{1+t^2} \right)' \right)$$

Area $= 2 \left[\operatorname{arctg} t - \frac{t}{1+t^2} \right]_0^{+\infty} = \pi$