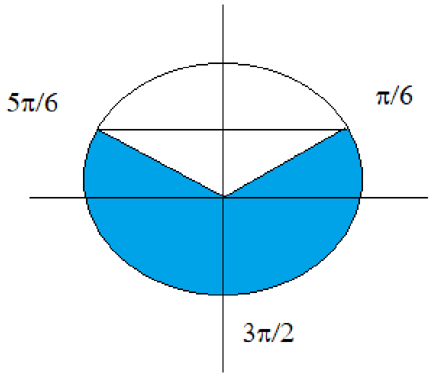
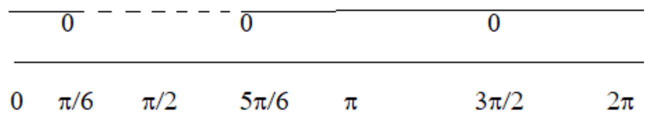
Soluzioni [A]

1.

C.E. assegnato dal problema

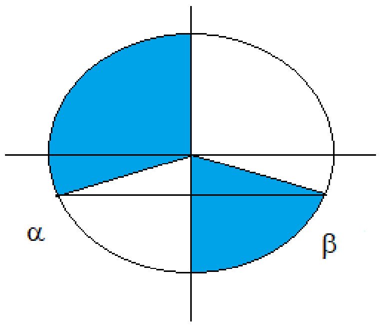
SGN $f(x) = 1 - \operatorname{sen}x - 2\operatorname{sen}^2x \geq 0 \iff -1 \leq \operatorname{sen}x \leq \frac{1}{2}$

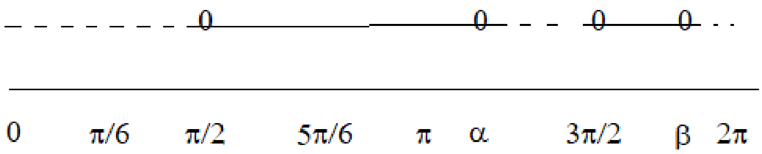




$f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 1 \quad f(\pi/2) = -2$

DRV $f'(x) = -2\operatorname{sen}2x - \cos x = -\cos x\,(4\operatorname{sen}x + 1)$

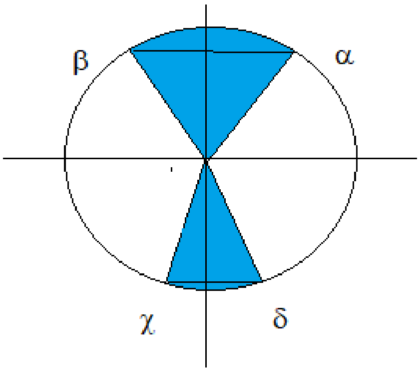


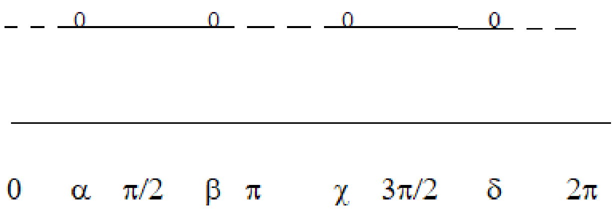


$\alpha = \pi + \operatorname{arcsen} 1/4$

$\beta = 2\pi - \operatorname{arcsen} 1/4$

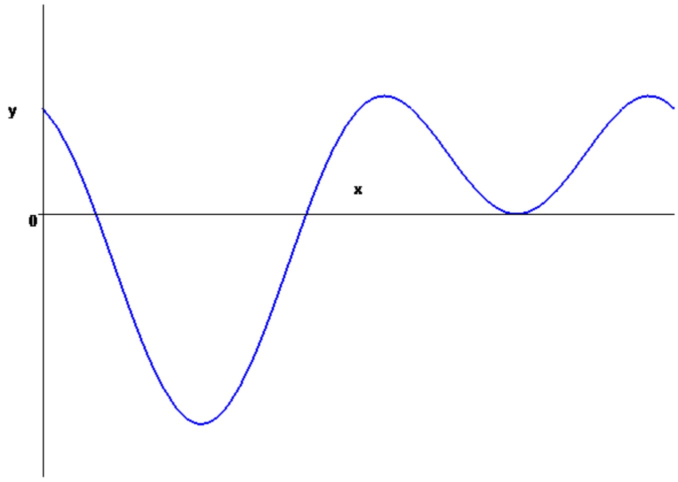
DRV^2 $f''(x) = -4\cos 2x + \operatorname{sen}x = 8\operatorname{sen}^2x + \operatorname{sen}x - 4 \geq 0$



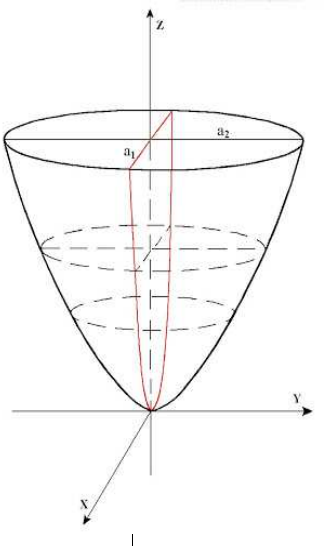


$$a = \frac{-1 - \sqrt{129}}{16} \qquad \alpha = \arcsin a \qquad \beta = \pi - \arcsin a$$

$$a = \frac{-1 - \sqrt{129}}{16} \qquad \chi = \pi - \arcsin b \quad \delta = 2\pi + \arcsin b$$



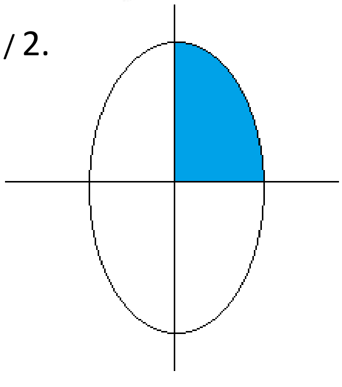
L'integrale $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{f(x)}$ è improprio per la presenza del punto π/6 , punto in cui la funzione f (x) si annulla e dunque 1 / f (x) diverge. Poiché f' (π/6) ≠ 0, 1 / f (x) è un infinito di ordine 1 e dunque l'integrale non esiste.



2.

La sezione S (z) con il piano perpendicolare all'asse delle z di generica quota z (con 0 ≤ z ≤ 1) è quella racchiusa dall'ellisse $4x^2 + y^2 = z$.

La sua area A (z) è 4 volte quella della regione colorata nella figura successiva, che è il trapezoide individuato dalla funzione f (x) = $\sqrt{z - 4x^2}$, con 0 ≤ x ≤ $\sqrt{z}$ / 2.



$$A(z) = 4 \int_0^{\sqrt{z}/2} \sqrt{z - 4x^2}\, dx .$$

Ponendo x = $\sqrt{z}$ sent / 2 , dx = ($\sqrt{z}$ cost / 2) dt , si ha:

$$4\int_0^{\pi/2} \sqrt{z - 4\frac{z}{4}\operatorname{sen}^2 t}\ \frac{\sqrt{z}\cos t}{2}\,dt = 2z\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= 2z\left[\frac{t+\operatorname{sen}t\cos t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi z}{2}.$$

Il volume è dunque :

$$V = \int_0^1 \frac{\pi z}{2}\,dz = \frac{\pi}{4}.$$

3.

$$y'\cos y = \sqrt{x\operatorname{sen}y}\ ,\ \text{con } x \ge 0,\ 0 \le y \le \pi/2$$

- y = 0 soluzione costante
- Soluzioni non costanti :

$$\int \frac{\cos y}{\sqrt{\operatorname{sen}y}}\,dy = \int \sqrt{x}\,dx \iff 2\sqrt{\operatorname{sen}y} = \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{2}{3}c \iff \operatorname{sen}y = \frac{\left(x^{3/2}+c\right)^2}{9}$$

$$y = \operatorname{arcsen}\frac{\left(x^{3/2}+c\right)^2}{9}.$$

Condizioni per esplicitare le soluzioni : $0 \le \frac{x^{3/2}+c}{3} < 1 \iff -c \le x^{3/2} < 3-c$;

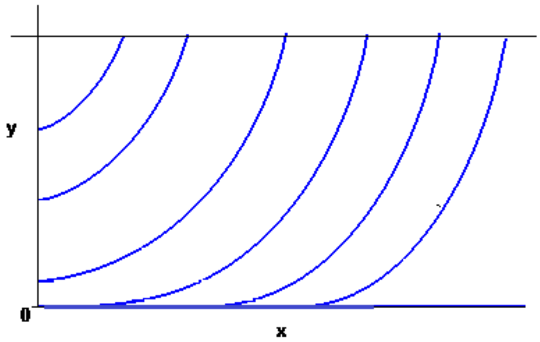
quindi :

per $0 \le c < 3$ deve essere $x \ge 0$

per $c < 0$ deve essere $0 \le x < (3-c)^{2/3}$.

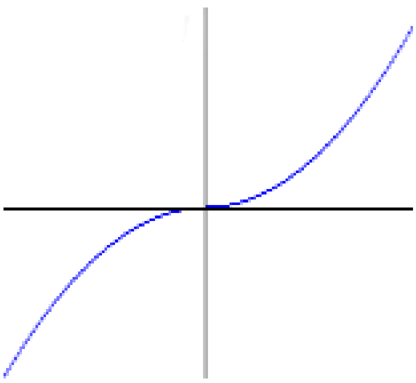
Nei punti in cui le soluzioni arrivano

- alla soluzione costante y = 0 la derivata è nulla (tangente orizzontale)
- alla retta y = π/2 la derivata non esiste (tangente verticale)
- all’asse delle y la derivata è nulla (tangente orizzontale).



4.

- $F(x)$ è definita e continua su tutto R
- $F'(x) = e^x \, | \operatorname{arctg} x |$ è positiva e dunque F è crescente in R ; questo prova l'iniettività della funzione
- $f(x) = e^x \, | \operatorname{arctg} x |$ non è integrabile in nessun intorno di $+\infty$ (perché diverge per $x \to +\infty$) ; è invece integrabile in un intorno di $-\infty$ (perché , data la presenza dell'esponenziale è infinitesima di ordine inferiore ad ogni potenza $1/x^\alpha$). L'immagine della funzione F è dunque una semiretta $(c , +\infty)$ e non tutta la retta.
- $F''(x) = (\operatorname{sgn} \operatorname{arctg} x)\, e^x \left(\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{1+x^2} \right)$
- $F''(0^\pm) = \pm 1$; tenendo anche conto che $F(0) = F'(0) = 0$, localmente è $F(x) = \operatorname{sgn} x \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ e questo prova che 0 è punto di flesso.

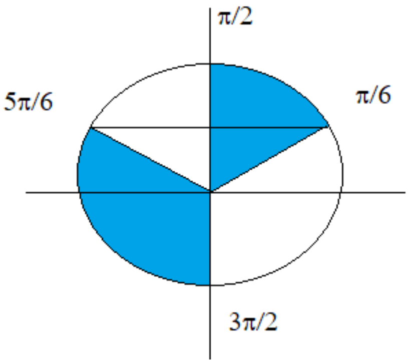


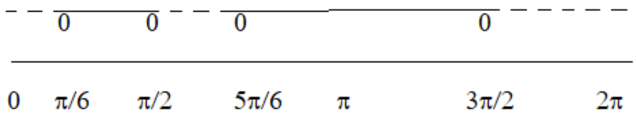
Soluzioni [B]

1.

C.E. assegnato dal problema

SGN $f(x) = \cos x\,(2\,\mathrm{sen}\,x - 1)$

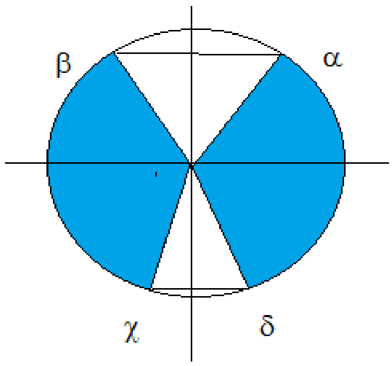


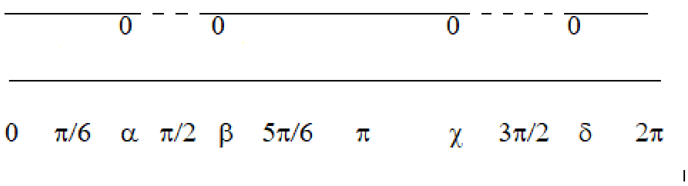


$f(0) = f(2\pi) = -1 \qquad f(\pi) = 1$

DRV $f'(x) = 2\cos 2x + \mathrm{sen}\,x = -4\,\mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}\,x + 2 \geq 0$

per $\dfrac{1-\sqrt{33}}{8} \leq \mathrm{sen}\,x \leq \dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$

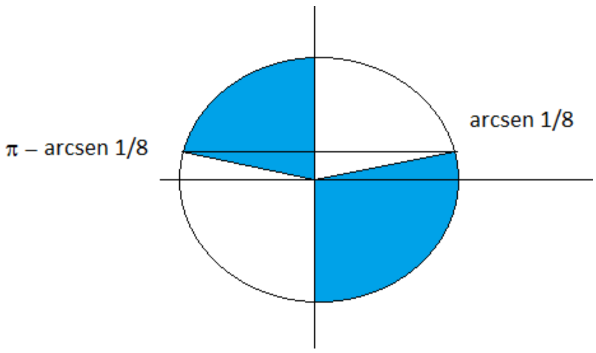


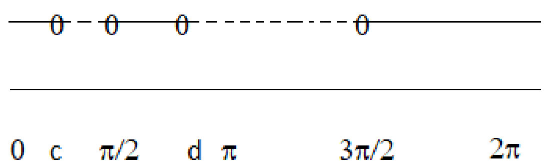


$a = \dfrac{1+\sqrt{33}}{8} \qquad \alpha = \mathrm{arcsen}\,a \qquad \beta = \pi - \mathrm{arcsen}\,a$

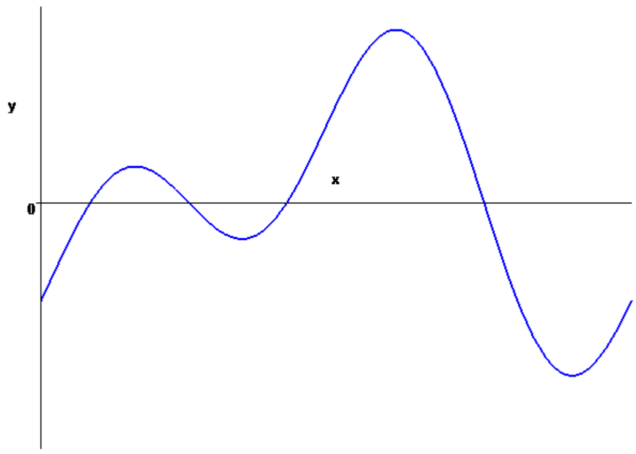
$b = \dfrac{1-\sqrt{33}}{8} \qquad \chi = \pi - \mathrm{arcsen}\,b \qquad \delta = 2\pi + \mathrm{arcsen}\,b$

DRV[2] f “ (x) = cosx (1 – 8 senx) ≥ 0



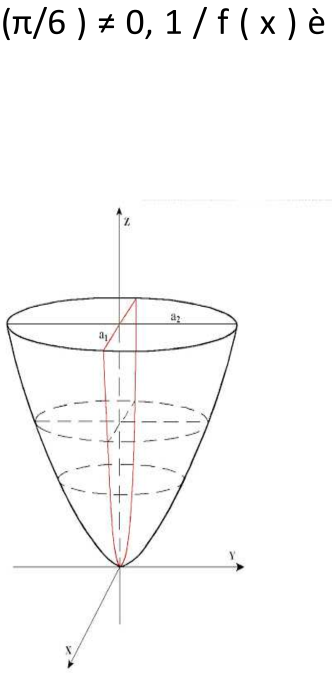


c = arcsen 1/8 d = π – arcsen 1/8



L’integrale $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{f\,(\,x\,)}$ è improprio per la presenza del punto π/6 , punto in cui la funzione f (x) si annulla e dunque 1 / f (x) diverge. Poiché f’ (π/6) ≠ 0, 1 / f (x) è un infinito di ordine 1 e dunque l’integrale non esiste.

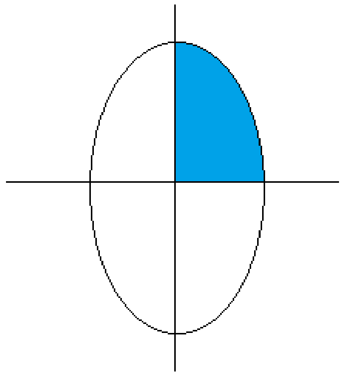
2.



La sezione S (z) con il piano perpendicolare all’asse delle z di generica quota z (con 0 ≤ z ≤ 1) è quella racchiusa dall’ellisse $2x^2 + y^2 = z$.

La sua area A (z) è 4 volte quella della regione colorata nella figura successiva, che è il trapezoide individuato dalla funzione f (x) = $\sqrt{z - 2x^2}$, con 0 ≤ x ≤ $\sqrt{z/2}$.

A (z) = $4\int_0^{\sqrt{z/2}} \sqrt{z - 2x^2}\, dx$.



Ponendo x = $\sqrt{z/2}$ sent , dx = $\sqrt{z/2}$ cost dt , si ha:

$$4\int_0^{\pi/2} \sqrt{z - 2\frac{z}{2}\mathrm{sen}^2 t}\ \frac{\sqrt{z}\cos t}{\sqrt{2}}\, dt = \frac{4}{\sqrt{2}}\, z \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\, z \left[\frac{t + \mathrm{sen}t \cos t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi z}{\sqrt{2}}.$$

Il volume è dunque :

V = $\int_0^1 \frac{\pi z}{\sqrt{2}}\, dz = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

3.

$$y' \,\mathrm{sen}y = \sqrt{x \cos y}\ ,\ \text{con } x \geq 0,\ 0 \leq y \leq \pi/2$$

- y = π/2 soluzione costante
- Soluzioni non costanti :

$$\int \frac{\mathrm{sen}y}{\sqrt{\cos y}}\, dy = \int \sqrt{x}\, dx \iff -2\sqrt{\cos y} = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{3}c \iff \cos y = \frac{\left(c - x^{3/2}\right)^2}{9}$$

$$y = \arccos \frac{\left(c - x^{3/2}\right)^2}{9} .$$

Condizioni per esplicitare le soluzioni : $0 < \frac{c - x^{3/2}}{3} \leq 1 \iff c - 3 \leq x^{3/2} < c$;

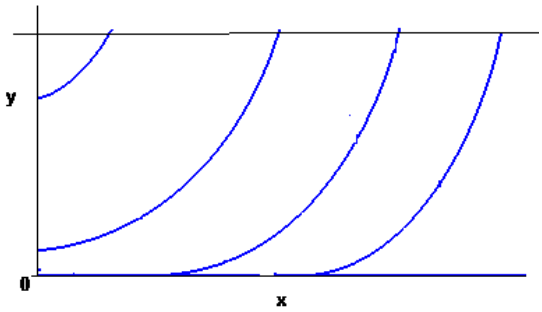
quindi :

per 0 < c < 3 deve essere 0 < x < $c^{2/3}$

per c ≥ 3 deve essere $(c - 3)^{2/3} \leq x < c^{2/3}$.

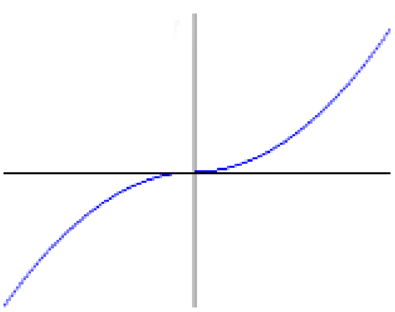
Nei punti in cui le soluzioni arrivano

- alla soluzione costante $y = \pi/2$ la derivata è nulla (tangente orizzontale)
- all'asse delle x la derivata non esiste (tangente verticale)
- all'asse delle y la derivata è nulla (tangente orizzontale).



4.

- $F(x)$ è definita e continua in $[-1, 1]$
- $F'(x) = e^x \mid \text{arcsen}x \mid$ è positiva e dunque F è crescente; questo prova l'iniettività della funzione
- $f(x) = e^x \mid \text{arcsen}x \mid$ è integrabile in $[-1, 1]$. L'immagine della funzione F è dunque un intervallo $[a, b]$ e non tutta la retta.
- $F''(x) = (\text{sgn}\,\text{arcsen}x)\, e^x \left(\text{arcsen}x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$
- $F''(0^{\pm}) = \pm 1$; tenendo anche conto che $F(0) = F'(0) = 0$, localmente è $F(x) = \text{sgn}x \, \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ e questo prova che 0 è punto di flesso.

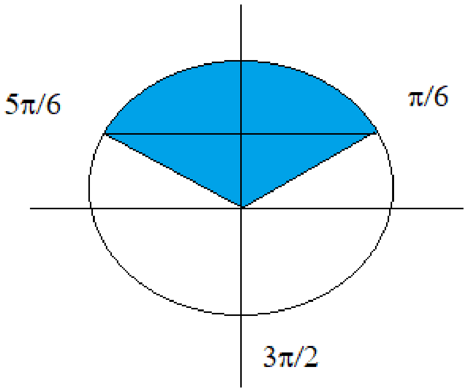


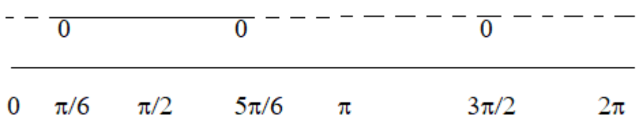
Soluzioni [C]

1.

C.E. assegnato dal problema

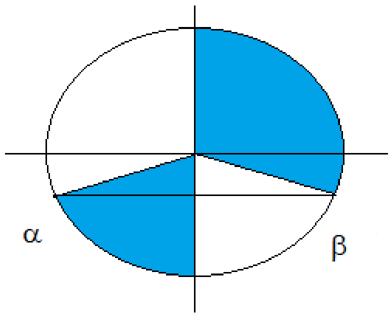
SGN $f(x) = 2sen^2x + senx - 1 \geq 0 \Leftrightarrow senx = -1$ oppure $senx \geq ½$

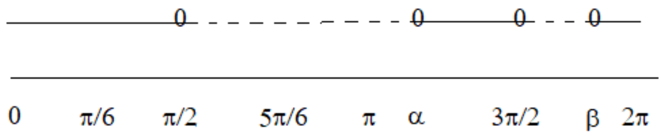




$f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = -1 \quad f(\pi/2) = 2$

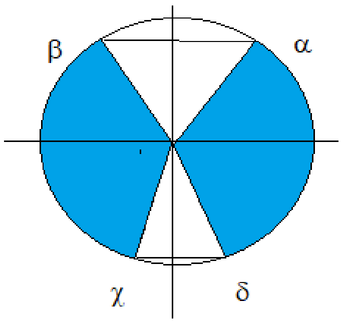
DRV $f'(x) = cosx(4 senx + 1)$

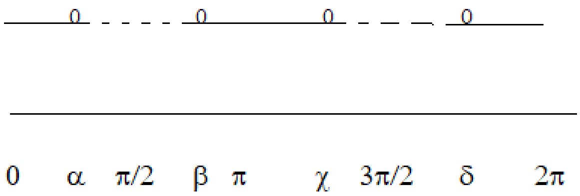




$\alpha = \pi + \text{arcsen}\, 1/4 \qquad \beta = 2\pi - \text{arcsen}\, 1/4$

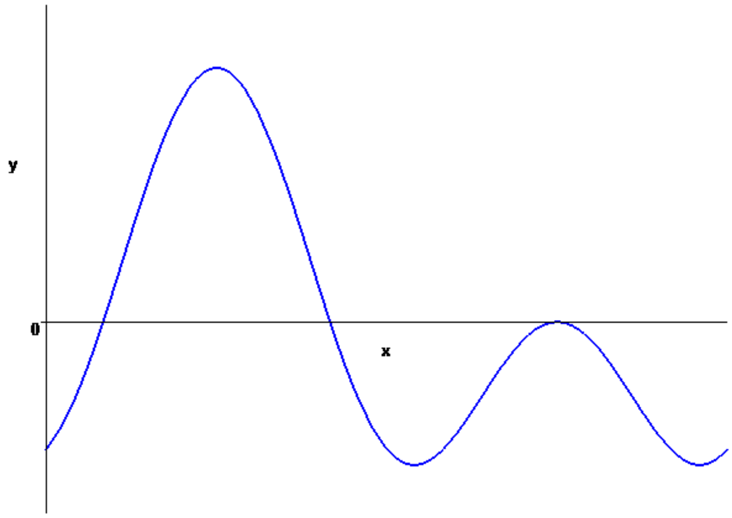
DRV² $f''(x) = -8 sen^2x - senx + 4 \geq 0$



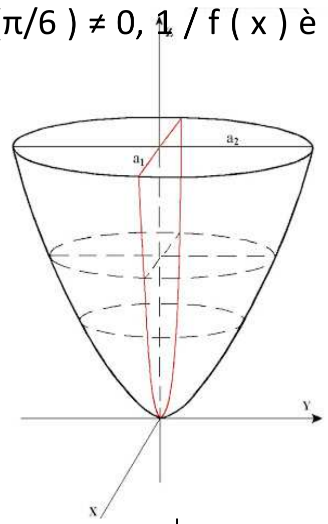


$a = \dfrac{-1-\sqrt{129}}{16} \qquad \alpha = \text{arcsen a} \qquad \beta = \pi - \text{arcsen a}$

$$a = \frac{-1-\sqrt{129}}{16} \qquad \chi = \pi - \text{ arcsen b} \quad \delta = 2\pi + \text{arcsen b}$$



L'integrale $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{f(x)}$ è improprio per la presenza del punto π/6 , punto in cui la funzione f (x) si annulla e dunque 1 / f (x) diverge. Poiché f' (π/6) ≠ 0, 1 / f (x) è un infinito di ordine 1 e dunque l'integrale non esiste.



2.

La sezione S (z) con il piano perpendicolare all'asse

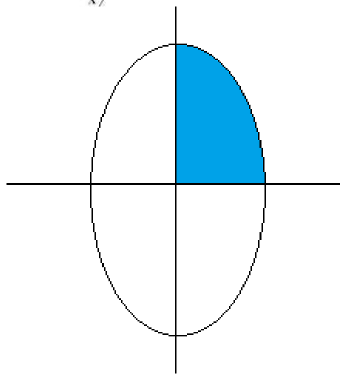
delle z di generica quota z (con 0 ≤ z ≤ 1) è quella

racchiusa dall'ellisse $16\,x^2 + y^2 = z$.

La sua area A (z) è 4 volte quella della regione

colorata nella figura a fianco , che è il trapezoide

individuato dalla funzione f (x) = $\sqrt{z - 16\,x^2}$, con 0 ≤ x ≤ $\sqrt{z}$ / 4.



A (z) = $4 \int_0^{\sqrt{z}/4} \sqrt{z - 16\,x^2}\ dx$.

Ponendo x = $\sqrt{z}$ sent / 4 , dx = ($\sqrt{z}$ cost / 4) dt , si ha:

$$4\int_0^{\pi/2}\sqrt{z-16\frac{z}{16}\operatorname{sen}^2 t}\;\frac{\sqrt{z}\cos t}{4}\,dt = z\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt =$$

$$= z\left[\frac{t+\operatorname{sen}t\cos t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi z}{4}.$$

Il volume è dunque :

$$V = \int_0^1 \frac{\pi z}{4}\,dz = \frac{\pi}{8}.$$

3.

$$y'\cos y = -\sqrt{x\operatorname{sen}y}\;,\ \text{con } x \ge 0,\ 0 \le y \le \pi/2$$

- y = 0 soluzione costante
- Soluzioni non costanti :

$$\int \frac{\cos y}{\sqrt{\operatorname{sen}y}}\,dy = \int -\sqrt{x}\;dx \quad \Leftrightarrow\ 2\sqrt{\operatorname{sen}y} = \frac{2}{3}c - \frac{2}{3}x^{3/2} \quad \Leftrightarrow\ \operatorname{sen}y = \frac{\left(c - x^{3/2}\right)^2}{9}$$

$$y = \operatorname{arcsen}\frac{\left(c - x^{3/2}\right)^2}{9}\ .$$

Condizioni per esplicitare le soluzioni : $0 \le \frac{c - x^{3/2}}{3} < 1 \Leftrightarrow\ c-3 < x^{3/2} \le c$;

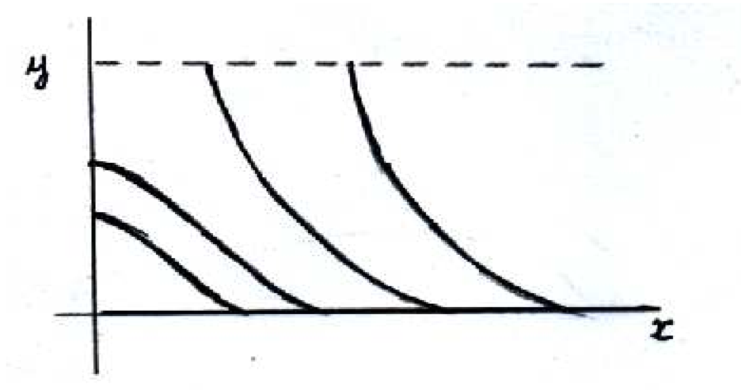
quindi :

per 0 ≤ c < 3   deve essere $0 \le x < c^{2/3}$

per c ≥ 3   deve essere $(c-3)^{2/3} \le x < c^{2/3}$.

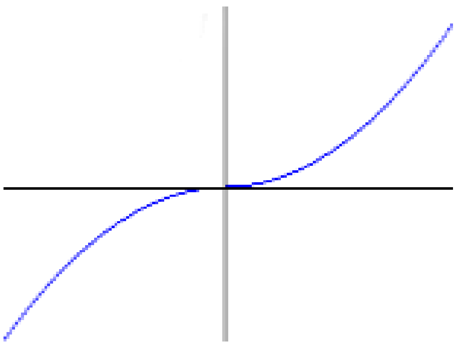
Nei punti in cui le soluzioni arrivano

- alla soluzione costante y = 0 la derivata è nulla (tangente orizzontale)
- alla retta y = π/2 la derivata non esiste (tangente verticale)
- all'asse delle y la derivata è nulla (tangente orizzontale).



4.

- $F(x)$ è definita e continua su tutto R
- $F'(x) = e^{-x}\,|\,\mathrm{arctg}x\,|$ è positiva e dunque F è crescente in R ; questo prova l'iniettività della funzione
- $f(x) = e^{-x}\,|\,\mathrm{arctg}x\,|$ non è integrabile in nessun intorno di $-\infty$ (perché diverge per $x \to -\infty$) ; è invece integrabile in un intorno di $+\infty$ (perché , data la presenza dell'esponenziale è infinitesima di ordine inferiore ad ogni potenza $1/x^{\alpha}$). L'immagine della funzione F è dunque una semiretta ($-\infty$, c) e non tutta la retta.
- $F''(x) = (\mathrm{sgn}\,\mathrm{arctg}x)\; e^{-x}\left(-\mathrm{arctg}x + \dfrac{1}{1+x^2}\right)$
- $F''(0^{\pm}) = \pm 1$; tenendo anche conto che $F(0) = F'(0) = 0$, localmente è $F(x) = \mathrm{sgn}x\,\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ e questo prova che 0 è punto di flesso.

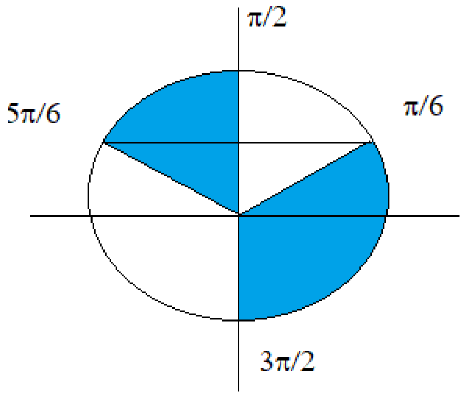


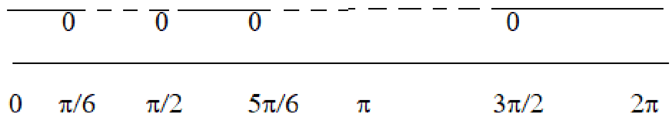
Soluzioni [D]

1.

C.E. assegnato dal problema

SGN $f(x) = \cos x\,(1 - 2\,\text{sen}\,x)$

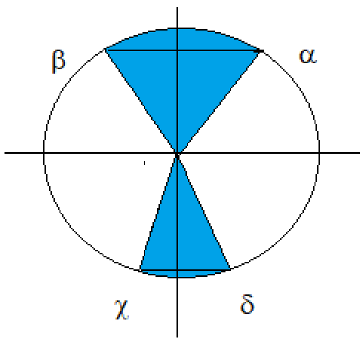


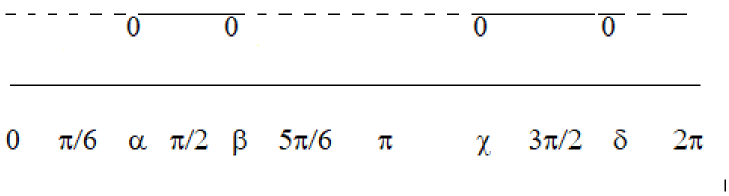


$f(0) = f(2\pi) = 1 \qquad f(\pi) = -1$

DRV $f'(x) = -2\cos 2x - \text{sen}\,x = 4\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\,x - 2 \geq 0$

per $\text{sen}\,x < \dfrac{-1-\sqrt{33}}{8}$ oppure $\text{sen}\,x > \dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$

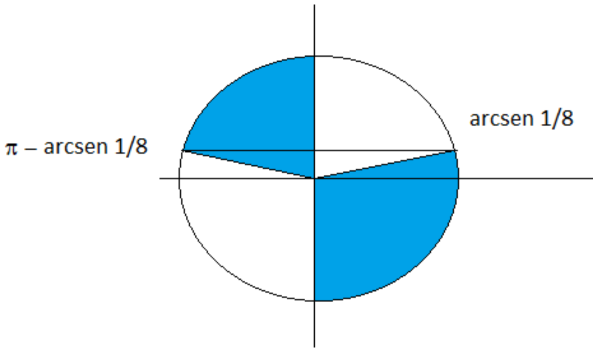


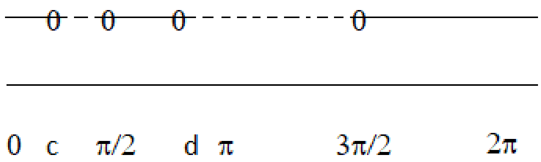


$$a = \frac{\sqrt{33}-1}{8} \qquad \alpha = \text{arcsen}\,a \qquad \beta = \pi - \text{arcsen}\,a$$

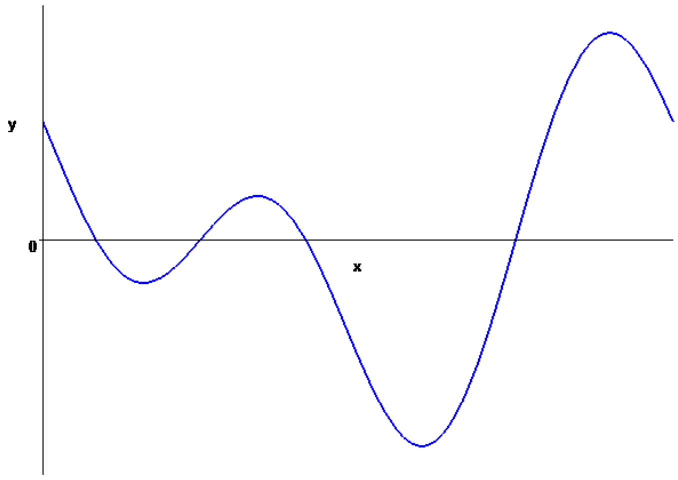
$$b = \frac{\sqrt{33}+1}{8} \qquad \chi = \pi + \text{arcsen}\,b \qquad \delta = 2\pi - \text{arcsen}\,b$$

DRV^2 $f''(x) = \cos x\,(1 - 8\,\text{sen}\,x) \geq 0$





c = arcsen 1/8   d = π – arcsen 1/8

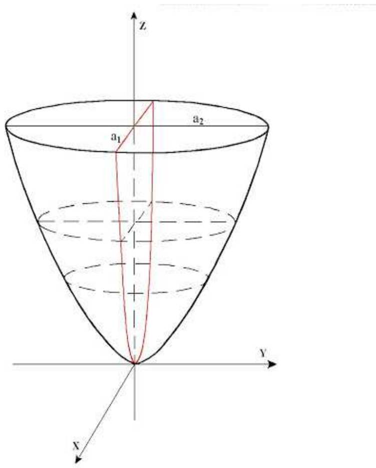


L'integrale $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{f(x)}$ è improprio per la presenza del punto π/6 , punto in cui la funzione f (x) si annulla e dunque 1 / f (x) diverge. Poiché f' (π/6) ≠ 0, 1 / f (x) è un infinito di ordine 1 e dunque l'integrale non esiste.

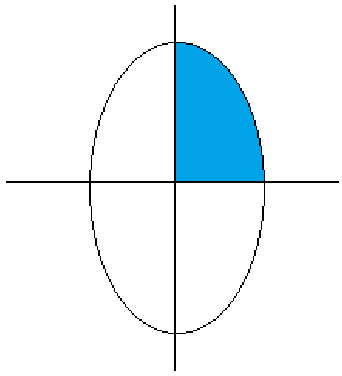
2.

La sezione S (z) con il piano perpendicolare all'asse delle z di generica quota z (con 0 ≤ z ≤ 1) è quella racchiusa dall'ellisse $9x^2 + y^2 = z$.

La sua area A (z) è 4 volte quella della regione colorata nella figura successiva , che è il trapezoide individuato dalla funzione f (x) = $\sqrt{z - 9x^2}$, con 0 ≤ x ≤ $\sqrt{z}/3$.



$$A(z) = 4\int_0^{\sqrt{z}/3} \sqrt{z-9x^2}\,dx .$$



Ponendo $x = \sqrt{z}\,\text{sen}t/3$, $dx = (\sqrt{z}\cos t/3)\,dt$, si ha:

$$4\int_0^{\pi/2} \sqrt{z-9\frac{z}{9}\text{sen}^2 t}\;\frac{\sqrt{z}\cos t}{3}\,dt = \frac{4}{3}z\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{4}{3}z\left[\frac{t+\text{sen}t\cos t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi z}{3} .$$

Il volume è dunque :

$$V = \int_0^1 \frac{\pi z}{3}\,dz = \frac{\pi}{6} .$$

3.

$$y'\,\text{sen}y = -\sqrt{x\cos y}\ ,\ \text{con } x \ge 0,\ 0 \le y \le \pi/2$$

- $y = \pi/2$ soluzione costante
- Soluzioni non costanti :

$$\int \frac{\text{sen}y}{\sqrt{\cos y}}\,dy = \int -\sqrt{x}\,dx \iff -2\sqrt{\cos y} = -\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{2}{3}c \iff \cos y = \frac{\left(x^{3/2}-c\right)^2}{9}$$

$$y = \arccos\frac{\left(x^{3/2}-c\right)^2}{9} .$$

Condizioni per esplicitare le soluzioni : $0 < \dfrac{x^{3/2}-c}{3} \le 1 \iff c \le x^{3/2} < c+3$;

quindi :

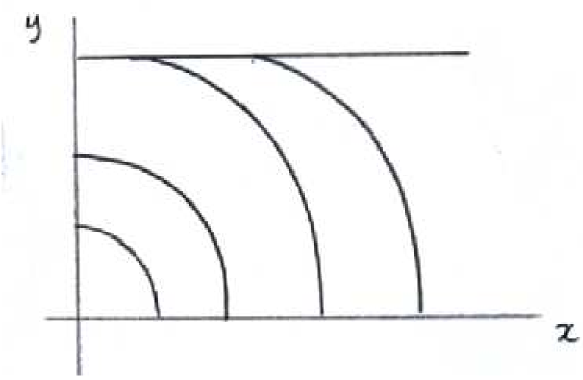
per $-3 < c < 0$ deve essere $0 < x < (c+3)^{2/3}$

per $c \ge 0$ deve essere $c^{2/3} \le x < (c+3)^{2/3}$.

Nei punti in cui le soluzioni arrivano

- alla soluzione costante $y = \pi/2$ la derivata è nulla (tangente orizzontale)

- all’asse delle x la derivata non esiste (tangente verticale)
- all’asse delle y la derivata è nulla (tangente orizzontale).



4.

- F (x) è definita e continua in [-1, 1]
- F ‘ (x) = e^{-x} | arcsenx | è positiva e dunque F è crescente; questo prova l’iniettività della funzione
- f (x) = e^{-x} | arcsenx | è integrabile in [-1 , 1] . L’immagine della funzione F è dunque un intervallo [a , b] e non tutta la retta.
- F” (x) = $(\operatorname{sgn} \operatorname{arcsen} x)\ e^{-x}\left(-\operatorname{arcsen} x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
- F “ ($0^{\pm}$) = ± 1 ; tenendo anche conto che F (0) = F’ (0) = 0 , localmente è F (x) = sgnx $\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ e questo prova che 0 è punto di flesso.