Soluzioni

1.

1. Converge.
   La serie è a segno alterno. Non possiamo usare il criterio di assoluta convergenza, perché

   $$| a_n | = \frac{n \log n}{n^2 + 1} \sim \frac{\log n}{n} > \frac{1}{n}$$

   e il fatto che la serie in valore assoluto diverge non permette di trarre conclusioni sulla serie data.
   Possiamo invece utilizzare il teorema di Leibniz perché la successione $n \log n / (n^2 + 1)$ tende a 0 decrescendo.
   Per verificare la decrescenza , si considera la funzione $f (x) = x \log x / (x^2 + 1)$ e si trova che la sua derivata

   $$\frac{x^2 (1 - \log x) + \log x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

   é negativa in un intorno di $+\infty$.

2. Converge
   $$| a_n | \sim \frac{\log n}{n^{3/2}} < \frac{n^{\alpha}}{n} = \frac{1}{n^{3/2 - \alpha}}$$
   Basta scegliere α in modo che sia $3/2 - \alpha > 1$, cioè $\alpha < ½$, perché la maggiorazione permetta di concludere.

3. Converge.
   La serie è a segno alterno. Non possiamo usare il criterio di assoluta convergenza, perché

   $$| a_n | \sim \frac{n}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{1/2}}$$

   e il fatto che la serie in valore assoluto diverge non permette di trarre conclusioni sulla serie data.
   Possiamo invece utilizzare il teorema di Leibniz perché $(n + 1) / ((n + 1)^{3/2} - 1)$ è una successione che tende a 0 decrescendo.
   Per verificare la decrescenza , si considera la funzione $f (x) = (x + 1) / ((x + 1)^{3/2} - 1)$ e si trova che la sua derivata

   $$\frac{- 1 - (x + 1)^{3/2} / 2}{((x + 1)^{3/2} - 1)^2}$$

   é negativa in un intorno di $+\infty$.

4. Converge.
   Poiché
   $$\frac{n^2 + e^{-n}}{n^2 + 1} \to 1$$
   si ha
   $$a_n \sim \frac{n^2 + e^{-n}}{n^2 + 1} - 1 = \frac{e^{-n} - 1}{n^2 + 1} \sim -\frac{1}{n^2}.$$

5. Converge.
   Poiché
   $$| a_n | \le \frac{1}{2^n},$$
   la serie converge assolutamente in quanto maggiorata da una serie geometrica convergente. La convergenza assoluta implica quella semplice.

6. Diverge
   Infatti
   $$a_n = e^{\log n / n} - 1 \sim \log n / n > 1 / n .$$

7. Converge
   Infatti
   $$a_n \sim \frac{n \dfrac{1}{2 n^2}}{n^{1/2}} = \frac{1}{2 n^{3/2}}.$$

8. Converge
   Infatti
   $$(\log n)^{\log n} = e^{\log n \ \log \log n} = (e^{\log n})^{\log \log n} = n^{\log \log n} > n^2$$
   e dunque
   $$a_n < 1 / n^2 .$$

9. Diverge
   Infatti
   $$n! < 2^n$$
   e dunque
   $$\log (n!) < n \log 2$$
   ovvero
   $$a_n > 1 / (n \log 2) .$$

10. Converge
   Il termine generale della serie si può scrivere nella forma
   $$(-1)^n \ n / (n^2 +1);$$
   la convergenza segue allora dal teorema di Leibniz.

2.

1. Se $|x| > 1$:

$$|a_n| \sim \frac{|x|^n}{n\,x^{2n}} = \frac{1}{n\,|x|^n} < \left(\frac{1}{|x|}\right)^n$$

La serie converge assolutamente , in quanto maggiorata da una serie geometrica convergente.

Se $|x| < 1$:

$$|a_n| \sim |x|^n$$

La serie converge assolutamente , in quanto maggiorata da una serie geometrica convergente.

Se $x = 1$:

$$a_n = \frac{1}{1+n} \sim \frac{1}{n} .$$

La serie diverge.

Se $x = -1$:

$$a_n \sim \frac{(-1)^n}{1+n}$$

La serie converge per il teorema di Leibniz.

2.

$$|a_n| \sim \frac{|x|^n}{n^{3/2}} \quad ; \quad \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n^{3/2}}} \to |x|$$

Se $|x| > 1$: la serie non converge.
Se $|x| < 1$: la serie converge (assolutamente)

Se $x = \pm 1$: $a_n \sim 1/n^{3/2}$ la serie converge (assolutamente) .

3. La serie ha senso per $x > 0$ ed è divergente; infatti :

$$a_n = \frac{\log n + \log x}{\sqrt{n + n^2 x^2}} \approx \frac{\log n}{n\,x} > \frac{1}{n\,x} .$$

4. Se $x < 2$: $a_n \approx \dfrac{n^2}{n^3} = \dfrac{1}{n}$ la serie diverge

se $x = 2$: $a_n \approx \dfrac{2\,n^2}{n^3} = \dfrac{2}{n}$ la serie diverge

se $x > 2$: $a_n \approx \dfrac{n^x}{n^3} = \dfrac{1}{n^{3-x}}$ la serie diverge ($3 - x < 1$)

5. $$|a_n| \approx \frac{\log n}{n^2}\,|x|^n$$

Con il criterio del rapporto si ottiene che per $|x| < 1$ la serie converge , per $|x| > 1$ la serie non converge.

Se $|x| = 1$, $|a_n| \approx \frac{\log n}{n^2} < \frac{n^\alpha}{n^2} = \frac{1}{n^{2-\alpha}}$; scegliendo $\alpha < 1$, si può concludere con la convergenza (assoluta) della serie.

6. Per $x = 0$ si ha la serie nulla , convergente.
   Per $x \neq 0$ applichiamo il criterio della radice : $\sqrt[n]{|a_n|} \to e^{-x}$ e concludiamo che per $x < 0$ la serie diverge , per $x > 0$ converge.

7. Riscritto il termine generale nella forma
   $$a_n = \left[- \frac{1}{2 \log (x^2 - 1)} \right]^n$$
   si riconosce una serie geometrica , definita per $|x| > 1$, $|x| \neq \sqrt{2}$.
   La serie converge per $1 < |x| < \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{e}}}$ oppure $|x| > \sqrt{1 + \sqrt{e}}$

   diverge per $\sqrt{2} < |x| \leq \sqrt{1 + \sqrt{e}}$

   è indeterminata per $\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{e}}} \leq |x| < \sqrt{2}$

8. Perché sia verificata la condizione necessaria , deve essere $x > 1$.
   La serie di termine generale $\frac{(-1)^n}{n^{x-1}}$ converge per il teorema di Leibniz.
   La serie di termine generale $\frac{1}{n^{x-1/2}}$ converge se $x > 3/2$, diverge se $1 < x \leq 3/2$.
   Anche la serie data, che è somma delle due serie considerate, converge se $x > 3/2$, diverge se $1 < x \leq 3/2$.

3.

1. $y(x) = 1/3 \text{ sen } x + A \cos 2x + B \text{ sen } 2x$

2. $y(x) = ½\, x \text{ sen } x + A \cos x + B \text{ sen } x$

3. Soluzioni dell’equazione omogenea :

   se $w < 4$ $\quad e^{-2x} \left(A e^{\sqrt{4-w}\, x} + B e^{-\sqrt{4-w}\, x} \right)$

   se $w > 4$ $\quad e^{-2x} \left(A \cos \sqrt{w-4}\, x + B \text{ sen } \sqrt{w-4}\, x \right)$

   se $w = 4$ $\quad e^{-2x} (A + B x)$

   Soluzione particolare dell’equazione completa (da aggiungere alle soluzioni trovate per l’equazione omogenea) :

se $w \neq -5$ $\qquad e^x \left(\dfrac{1}{w+5}\, x - \dfrac{6}{(w+5)^2} \right)$

se $w = -5$ $\qquad e^x\, x\, \dfrac{3x-1}{36}$.

4. $y(x) = ½ \cos x + A e^x + B e^{-x/4} \cos \sqrt{7}\, x/4 + C e^{-x/4} \operatorname{sen} \sqrt{7}\, x/4$

5. $y(x) = ½ (2 - x) \operatorname{sen} x - ½ (1 + x) \cos x + A + B e^{-x}$

   Le condizioni iniziali sono verificate per A = 1 , B = -1/2

6. $y(x) = x(2x+1)e^{2x}/16 + A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x$.

   Le condizioni iniziali sono verificate per A = -1/16 , B = 3/8 .

7. Dalla seconda equazione si ricava

   $y = (z' - z)/2$ e quindi $y' = (z'' - z')/2$.

   Sostituendo nella prima equazione , si ottiene

   $z'' - 2z' + 5z = 2 \operatorname{sen} x$

   con le condizioni iniziali $z(0) = 0$, $z'(0)\ 2y(0) + z(0) = 0$.
   Le soluzioni dell'equazione sono

   $z(x) = (\cos x + 2 \operatorname{sen} x)/5 + e^x (A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x)$.

   Le condizioni iniziali sono verificate per A = -1/5 , B = -1/10 :

   $z(x) = (\cos x + 2 \operatorname{sen} x)/5 - e^x (2 \cos 2x + \operatorname{sen} 2x)/10$.

   Poiché $y = (z' - z)/2$, si ottiene

   $z(x) = (\cos x - 3 \operatorname{sen} x)/5 - e^x (2 \cos 2x - 3 \operatorname{sen} 2x)/10$.

8. $y(x) = x - \sqrt{x} + 1/2 + c\, e^{-2\sqrt{x}}$

   Per arrivare alla soluzione , occorre calcolare l'integrale $\int \sqrt{x}\, e^{2\sqrt{x}}\, dx$; a questo scopo si pone $\sqrt{x} = t$, in modo da ottenere $\int 2t^2 e^{2t}\, dt$, e successivamente si integra per parti fino a trovare $(t^2 - t + ½) e^{2t} + c$ …..

4.

1. Non esistono soluzioni costanti.
   Separando le variabili e integrando, si ottiene

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{e^s} = \int_{x_0}^{x} dt \quad \Rightarrow \quad -e^{-y} + e^{-y_0} = x - x_0 \quad \Rightarrow \quad e^{-y} = c - x \quad \Rightarrow \quad y = -\log(c - x) .$$

   Le soluzioni sono definite per $x < c$ (gli intervalli di definizione dipendono dalle condizioni iniziali) .

2. Non esistono soluzioni costanti.
   Separando le variabili e integrando, si ottiene

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{1+s^2} = \int_{x_0}^{x} (1 + 2t)\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} y_0 = x + x^2 - x_0 - x_0^2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} y = x^2 + x + c \quad (*)$$

$$\Rightarrow \quad y = \operatorname{tg}(x^2 + x + c) .$$

   Le soluzioni sono definite per le x tali che $-\pi/2 < x^2 + x + c < \pi/2$.
   Imponendo in (*) la condizione iniziale , si ottiene $c = \pi/4$ e quindi la soluzione richiesta è
   $y = \operatorname{tg}(x^2 + x + \pi/4)$, definita per $x \in \left(\dfrac{-1 - \sqrt{1+3\pi}}{2} , \dfrac{-1 + \sqrt{1+3\pi}}{2} \right)$.

3. La funzione $y = 0$ (definita per $x > 0$) è l'unica soluzione costante.
   Separando le variabili e integrando, si ottiene

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y} = \sqrt{x} + c \quad \Rightarrow \quad y = (\sqrt{x} + c)^2$$

   Le soluzioni sono definite per $\sqrt{x} + c > 0$, cioè per $x > 0$ se $c \geq 0$, per $x > c^2$ se $c < 0$.

4. Non esistono soluzioni costanti.
   Separando le variabili e integrando, si ottiene

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\cos s}{1 + \operatorname{sen} s}\, ds = \int_{x_0}^{x} t\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \log(1 + \operatorname{sen} y) = \frac{x^2 + c}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} y = k\, e^{x^2/2} \quad (k = e^{c/2} > 0)$$

$$\Rightarrow \quad y = \operatorname{arcsen}(k\, e^{x^2/2})$$

   Le soluzioni sono definite per le x tali che $-\pi/2 < k\, e^{x^2/2} < \pi/2$.

5.

Con l'ipotesi fatta sulla perdita di energia, la palla rimbalza infinite volte sul pavimento, dunque lo spazio totale va calcolato come somma di una serie. Al momento del primo rimbalzo lo spazio percorso è di 1 metro (solo in discesa) ; tra il primo e il secondo rimbalzo , contando salita e discesa , lo spazio percorso è $y_1 = 2 \cdot 0{,}9$ metri , e così via . In particolare , tra i rimbalzi n ed n+1 – esimi lo spazio percorso è $y_n = 2 \cdot (0{,}9)^n$ metri . In definitiva lo spazio percorso dalla palla è dato da $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (0{,}9)^n = 1 + 2 \left(\frac{1}{1 - 0{,}9} - 1 \right) = 19$ metri .

Tenendo conto che il tempo percorso per una discesa è uguale a quella per la precedente risalita, il tempo che intercorre tra i rimbalzi n ed n + 1-esimi è dato da $T_n = 2 \sqrt{2 (0{,}9)^n / g}$. Il tempo complessivo è dunque

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n = \sqrt{\frac{2}{g}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2 (0{,}9)^n}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}} + 2 \sqrt{\frac{2}{g}} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{0{,}9}^{\,n} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{g}} + 2 \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\frac{1}{1 - \sqrt{0{,}9}} - 1 \right) = 17{,}15 \text{ secondi} .$$

6.

1. Vero
   Richiamiamo la dimostrazione dell'asserto.
   Infatti , essendo $0 \leq | a_n | + a_n \leq 2 | a_n |$, dal criterio del confronto segue che la serie positiva $\sum_{n=1}^{\infty} (| a_n | + a_n)$ converge ; allora converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in quanto differenza di due serie convergenti : quella di termine generale $| a_n | + a_n$ e quella di termine generale $| a_n |$.

2. Falso
   La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n / n$ converge per il teorema di Leibniz , ma la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1 / n$ diverge.

3. Vero
   La successione delle somme parziali è monotòna e quindi ammette limite (finito o no).

4. Vero
   Infatti $a_n = s_n - s_{n-1} \to S - S = 0$.

5. Falso
   Le serie armoniche $\sum_{n=1}^{\infty} 1 / n^{\alpha}$ hanno tutte termine noto infinitesimo ; ma solo quelle con esponente $\alpha > 1$ convergono.

6. Falso
   La serie a segno alterno $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ non converge.