Parte seconda : Calcolo integrale

3. Integrale doppio su un rettangolo

Sia A un sottoinsieme limitato del piano e $f(x,y)$ una funzione definita in A e limitata. L'integrale doppio

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

è un numero definito in modo tale che se $f(x,y)$ è positiva, possa essere ragionevolmente assunto come misura del volume del cilindroide individuato dalla funzione (cioè della regione di spazio compresa tra il grafico della funzione e il dominio A ; nel caso particolare che f sia costante, questa regione diventa un cilindro retto di base A) .

Iniziamo con il caso che il dominio A sia un rettangolo chiuso con i lati paralleli agli assi cartesiani:

$$R = \{ (x,y) : x \in [a,b] \, , \, y \in [c,d] \} .$$

Prendendo una partizione P_x dell'intervallo $[a,b]$ ed una partizione P_y dell'intervallo $[c,d]$

$$P_x = \{ x_0 \;\; x_1 \; \ldots\ldots \; x_n \} \qquad\qquad P_y = \{ y_0 \;\; y_1 \; \ldots\ldots \; y_m \} ,$$

si ottiene una partizione P del rettangolo in nm rettangoli chiusi R_{ij} con i lati paralleli agli assi. Il generico rettangolo R_{ij} è definito da

$$R_{ij} = \{ (x,y) : x \in [x_{i-1}, x_i] \, , \, y \in [y_{j-1}, y_j] \}$$

e la sua area è data da

$$\Delta R_{ij} = \Delta x_i \, \Delta y_j = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) .$$

Definiamo le somme integrali superiore ed inferiore relative a questa partizione in modo analogo a quanto fatto nel caso di una variabile :

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} L_{ij} \Delta R_{ij} \qquad\qquad \underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} l_{ij} \Delta R_{ij}$$

dove L_{ij} e l_{ij} indicano rispettivamente l'estremo superiore e quello inferiore della funzione f nel rettangolo R_{ij} . Se $f \geq 0$, queste somme rappresentano il volume della regione di spazio formata da parallelepipedi affiancati , circoscritta oppure inscritta al cilindroide individuato dalla funzione.
Al variare della partizione queste somme descrivono due insiemi separati. Ancora in analogia a quanto visto nel caso di una variabile possiamo dare le seguenti definizioni:

(1) La funzione $f(x,y)$ si dice <u>integrabile</u> nel rettangolo R se gli insiemi descritti dalle somme integrali sono contigui.

(2) Se la funzione $f(x,y)$ è integrabile nel rettangolo R , si definisce integrale della funzione l'elemento di separazione dei due insiemi contigui di somme. La notazione per indicare questo integrale è $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$.

(3) Se la funzione $f(x,y)$ è integrabile e positiva , definiamo volume del cilindroide da essa individuato l'integrale della funzione.

E' immediato verificare che per una funzione f (x , y) = k costante risulta

$$\iint_R f(x,y)\ dx\, dy = k(b-a)(d-c) .$$

In questo caso il cilindroide è un parallelepipedo: il risultato trovato prova che il suo volume calcolato mediante integrazione coincide con quello fornito dalla geometria elementare. Questo è il punto di partenza per verificare che per tutte le figure geometriche elementari vale l'uguaglianza tra i volumi misurati nei due diversi modi.

Una condizione sufficiente a garantire l'esistenza dell'integrale è la continuità della funzione sul rettangolo R :

<u>le funzioni f (x , y) continue sul rettangolo R sono integrabili</u> .

In realtà, anche nel caso di due variabili potremmo estendere l'integrabilità alle funzioni generalmente continue. In questo caso, però, le funzioni generalmente continue non sono soltanto quelle discontinue in un numero finito di punti (e limitate) , ma anche quelle discontinue su una o più linee.

Per quanto riguarda il calcolo esplicito dell'integrale, consideriamo il seguente esempio :

$$\iint_R x y^2\ dx\, dy \quad , \quad \text{con } R = [0,1] \text{ X } [-1,2] .$$

L'integrale esiste perché la funzione è continua.
Supponiamo adesso di mantenere x fissa e di far variare solo y , cioè riguardiamo la funzione data come dipendente solo dalla variabile y. Per ogni fissato $x \in [a, b]$ la funzione $y \rightarrow f(x,y)$ è continua nell'intervallo [c , d] e dunque ha senso calcolarne l'integrale :

$$\int_c^d f(x,y)\ dy .$$

Nel caso specifico questo integrale vale

$$\int_{-1}^{2} x y^2\ dy = x \int_{-1}^{2} y^2\ dy = x \left[y^3 / 3 \right]_{y=-1}^{2} = 3x .$$

Il risultato di questa integrazione è una funzione della variabile x, continua nell'intervallo [a , b] e dunque integrabile. Calcoliamo questo integrale

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx$$

che comunemente è scritto nella forma

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\, dy .$$

Nel caso preso in considerazione si ottiene

$$\int_0^1 3x\ dx = \frac{3}{2} .$$

Seguiamo adesso la strada inversa: fissiamo y e facciamo variare solo la x.
Per ogni fissato $y \in [c, d]$, la funzione $x \to f(x, y)$ è continua nell'intervallo $[a, b]$ e dunque ha senso calcolarne l'integrale ; l'integrale

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

è una funzione continua della variabile y e quindi possiamo integrarla in $[a, b]$, ottenendo :

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

che si scrive comunemente nella forma

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx \ .$$

Nel caso considerato si ottiene prima

$$\int_0^1 x\, y^2\, dx = y^2 \int_0^1 x\, dx = \frac{y^2}{2}$$

e poi

$$\int_{-1}^2 \frac{y^2}{2}\, dy = \frac{3}{2}.$$

Nel caso particolare dell'esempio abbiamo dunque verificato l'uguaglianza

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx \ .$$

Si può provare che questo risultato vale in generale per ogni funzione $f(x, y)$ continua sul rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$ e inoltre che il valore comune a queste due espressioni è proprio l'integrale doppio

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy .$$

L'uguaglianza tra l'integrale doppio e i due integrali iterati si chiama <u>formula di riduzione</u> .

Nell'esempio considerato la funzione $f(x, y)$ è a variabili separate, cioè della forma $u(x)\, v(y)$; in questo caso particolare la formula di riduzione si semplifica ulteriormente, diventando :

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \left(\int_a^b u(x)\, dx \right) \left(\int_c^d v(y)\, dy \right)$$

cioè l'integrale doppio diventa il prodotto di due integrali semplici.

Nel caso dell'esempio :

$$\int_0^1 x \; dx = \frac{1}{2} \quad , \quad \int_{-1}^{2} y^2 \; dy = 3 \quad , \quad \iint_R x\,y^2 \; dx\,dy = \frac{3}{2}.$$

<u>Altri esempi</u>.

Esempio 1.

$$f(x,y) = \text{sen}\, x + \cos y \qquad\qquad R = [\,0\,,\pi/2\,] \;X\; [\,0\,,\pi/2\,]$$

I metodo : si integra prima rispetto ad y e poi ad x.

$$\int_0^{\pi/2} (\,\text{sen}\, x + \cos y\,)\, dy = \Big[\; y\,\text{sen}\, x + \text{sen}\, y\,\Big]_{y=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\,\text{sen}\, x + 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2}\,\text{sen}\, x + 1 \right) dx = \left[\; - \frac{\pi}{2} \cos x + x \;\right]_{x=0}^{\pi/2} = \pi \;.$$

II metodo : si integra prima rispetto ad x e poi ad y.

$$\int_0^{\pi/2} (\,\text{sen}\, x + \cos y\,)\, dx = \Big[\; - \cos x + x \cos y\,\Big]_{x=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \cos y + 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} \cos y + 1 \right) dy = \left[\; \frac{\pi}{2}\,\text{sen}\, y + y \;\right]_{x=0}^{\pi/2} = \pi .$$

Esempio 2.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad\qquad R = [\,0\,,a\,] \;X\; [\,0\,,b\,]$$

I metodo : si integra prima rispetto ad y e poi ad x.

$$\int_0^b (\,x^2 + y^2\,)\, dy = \left[\; x^2\, y + \frac{y^3}{3} \;\right]_{y=0}^{b} = b\,x^2 + \frac{b^3}{3}$$

$$\int_0^a \left(b\,x^2 + \frac{b^3}{3} \right) dx = \left[\; \frac{b\,x^3}{3} + \frac{b^3\, x}{3} \;\right]_{x=0}^{a} = \frac{a^3\, b + a\, b^3}{3} = \frac{a\, b\,(\,a^2 + b^2\,)}{3}\;. \;.$$

II metodo : si integra prima rispetto ad x e poi ad y.

$$\int_0^a (x^2 + y^2)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x y^2 \right]_{x=0}^{a} = \frac{a^3}{3} + a y^2$$

$$\int_0^b \left(\frac{a^3}{3} + a y^2 \right) dy = \left[\frac{a^3 y}{3} + \frac{a y^3}{3} \right]_{y=0}^{b} = \frac{a^3 b + a b^3}{3} = \frac{a b (a^2 + b^2)}{3} .$$

La scelta di quale dei due metodi usare, cioè di quale ordine seguire nell'integrazione, è del tutto indifferente, ma talora una può comportare una semplificazione dei calcoli rispetto all'altra.
Si consideri a questo proposito l'esempio successivo.

Esempio 3.

$$f(x , y) = y\, e^{x y} \qquad\qquad R = [-1 , 0] \times [0 , 1]$$

I metodo : si integra prima rispetto ad x e poi ad y.

$$\int_{-1}^{0} y\, e^{x y}\, dx = \left[e^{x y} \right]_{x=-1}^{0} = 1 - e^{-y}$$

$$\int_0^1 \left(1 - e^{-y}\right) dy = \left[y + e^{-y} \right]_{y=0}^{1} = 1 / e .$$

II metodo : si integra prima rispetto ad y e poi ad x.

$$\int_0^1 y\, e^{x y}\, dy = \left[\frac{y}{x} e^{x y} \right]_{y=0}^{1} - \int_0^1 \frac{e^{x y}}{x}\, dy =$$

(abbiamo integrato per parti)

$$= \left[\frac{y}{x} e^{x y} - \frac{1}{x^2} e^{x y} \right]_{y=0}^{1} = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} + \frac{1}{x^2} .$$

La funzione così ottenuta ha una discontinuità eliminabile per x = 0 ; possiamo dunque integrarla rispetto ad x :

$$\int_{-1}^{0} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) dx .$$

Ripetiamo l'integrazione per parti : poiché

$$\int \frac{1}{x} e^x\, dx = \frac{1}{x} e^x + \int \frac{1}{x^2} e^x\, dx ,$$

si ha

$$\int \left(\frac{1}{x} e^x - \frac{1}{x^2} e^x + \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{x} e^x + \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{e^x - 1}{x} + c .$$

Dunque l'integrale richiesto vale :

$$\left[\frac{e^x - 1}{x} \right]_{-1}^{0} = 1 / e.$$

(In questo caso non si calcola il valore della primitiva per x = 0, ma il suo limite per $x \to 0$).

4.. Integrale doppio su domini più generali

Ci proponiamo adesso di estendere la definizione di integrale doppio al caso di un dominio del piano più generale dei rettangoli sinora considerati. Se il dominio A è un insieme limitato del piano, possiamo scegliere un rettangolo R con i lati paralleli agli assi che contiene A. Ciò stabilito, prolunghiamo la funzione f (x , y) al di fuori di A ponendola uguale a 0:

$$f^* (x , y) = = \begin{cases} f (x , y) & \text{se } (x , y) \in A \\ 0 & \text{se } (x , y) \in R - A \end{cases} .$$

Definiamo f (x , y) <u>integrabile</u> in A se f * (x , y) lo è in R ; quando ciò accade, definiamo l'<u>integrale doppio</u> di f in A mediante l'uguaglianza :

$$\iint_A f (x , y) \, dx \, dy = \iint_R f^*(x , y) \, dx \, dy .$$

Si può provare che l'integrabilità della funzione e il valore del suo integrale non dipendono dalla particolare scelta del rettangolo R.
Tuttavia, anche se f (x , y) è continua in A , non è detto che f * (x , y) lo sia in R (a meno che la funzione f non sia nulla sulla frontiera di A).
Si può però dimostrare che

> se f (x , y) è una funzione continua definita su un dominio chiuso e limitato A del piano, la cui frontiera è costituita da un numero finito di curve di lunghezza finita, allora f (x , y) è integrabile su A.

Un caso particolare è dato dalle funzioni continue su <u>insiemi normali rispetto all'asse x</u> , cioè domini della forma :

$$A = \{ (x , y) : x \in [a , b] , \alpha (x) \leq y \leq \beta(x) \}$$

dove $\alpha (x)$, $\beta(x)$ sono due funzioni continue in [a , b].
La formula di riduzione ottenuta integrando prima rispetto ad y e poi ad x , in questo caso diventa :

$$\iint_A f (x , y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_{\alpha (x)}^{\beta (x)} f (x , y) \, dy$$

e permette il calcolo esplicito dell'integrale doppio.
In maniera analoga si possono considerare gli insiemi normali rispetto all'asse y , che sono della forma :

$$A = \{ (x,y): y \in [c,d] , \gamma(y) \leq x \leq \delta(y) \}$$

dove $\gamma(y)$, $\delta(y)$ sono due funzioni continue in $[c,d]$.
La formula di riduzione ottenuta integrando prima rispetto ad x e poi ad y , in questo caso diventa :

$$\iint_A f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\, dx$$

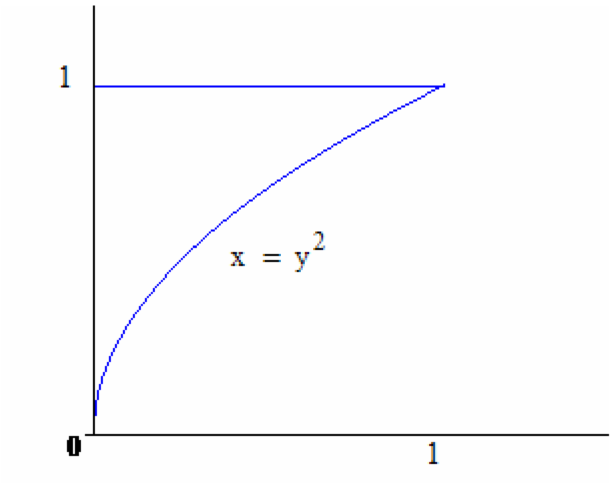
e permette il calcolo esplicito dell'integrale doppio.
Se poi A è l'unione di un numero finito di domini normali A_1 …. A_n che non abbiano punti in comune, se non una parte della frontiera, allora

$$\iint_A f(x,y)\, dx\, dy = \sum_{k=1}^{n} \iint_{A_k} f(x,y)\, dx\, dy .$$

Rimane da aggiungere che l'integrabilità così definita verifica proprietà analoghe a quelle valide nel caso di una variabile : linearità , positività , monotonia.

Esempio 1:

Calcoliamo l'integrale della funzione $f(x,y) = e^{y^3}$ nel dominio indicato nella figura successiva:



Il dominio è normale rispetto ad entrambi gli assi .

(i) rispetto all'asse delle x : $0 \leq x \leq 1 \quad \sqrt{x} \leq y \leq 1$.

La formula di riduzione diventa

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\, dy \ .$$

Poiché non possiamo scrivere in forma elementare le primitive di e^{y^3}, questa strada non è percorribile.

(i i) rispetto all'asse delle y : $0 \leq y \leq 1 \quad 0 \leq x \leq y^2$.

La formula di riduzione diventa :

$$\int_0^1 e^{y^3}\, dy \int_0^{y^2} dx$$

da cui segue

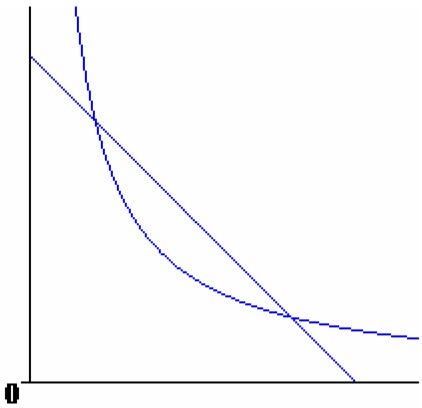
$$\int_0^1 y^2\ e^{y^3}\, dy$$

e successivamente

$$\left[\ \frac{e^{y^3}}{3}\ \right]_{y=0}^{1} = \frac{e-1}{3} .$$

Esempio 2 :

Integriamo la funzione $f(x, y) = \log x$ nella regione di piano compresa tra l'iperbole $x y = 1$ e la retta $2x + 2y = 5$.



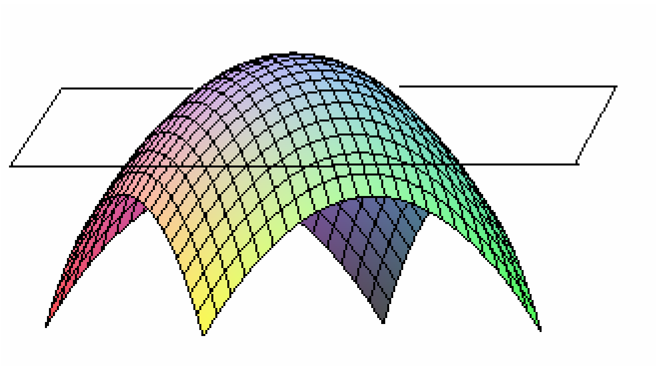
La regione è normale rispetto ad entrambi gli assi.
Se la vediamo come normale rispetto all'asse delle x , si ha $1/2 \leq x \leq 2$, $1/x \leq y \leq 5/2 - x$ e dunque la formula di riduzione diventa :

$$\int_{1/2}^{2} \log x\ dx \int_{1/x}^{5/2-x} dy = \int_{1/2}^{2} \left(\frac{5}{2} - x - \frac{1}{x} \right) \log x\ dx = ...$$

Il lettore completi i calcoli e successivamente provi a ripeterli interpretando la regione come normale all'asse delle y.

Esempio 3 (calcolo di un integrale in coordinate polari) :

Calcoliamo il volume della regione di spazio compresa tra la superficie di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$ (paraboloide) e il piano xy.



Indicato con A il cerchio di centro l'origine e raggio unitario nel piano xy , il volume richiesto è dato dall'integrale

$$\iint_A (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dy$$

Portare avanti questo calcolo non è agevole. Se riferiamo il piano a coordinate polari (r , θ), il dominio di integrazione è caratterizzato dalle condizioni $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ e la funzione assume la forma $f (r , \delta) = 1 - r^2$. Ci riconduciamo dunque a integrare una funzione della sola variabile r su un rettangolo del piano (r , θ) . Però, come già nel caso di una variabile, quando si cambiano le variabili di integrazione dobbiamo tener conto dei termini differenziali. In particolare nel passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari il termine dx dy si trasforma in r dr dθ (non possiamo scendere nei dettagli di questa affermazione). L'integrale diventa dunque :

$$\int_0^1 r (1 - r^2)\, dr \int_0^{2\pi} d\theta = \ldots. = \pi / 2 .$$

Esempio 4 (un integrale importante) :

L'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

converge e il suo valore (che indichiamo con I) non dipende da quale simbolo si usa per indicare la variabile di integrazione. Possiamo allora esprimere il suo quadrato come prodotto di due integrali identici, ma con le loro variabili indicate in modo diverso; successivamente possiamo interpretare questo prodotto come un integrale doppio e calcolarlo in coordinate polari.

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, dy = \iint_{R^2} e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy \, .$$

Attenzione ! Questo è un integrale doppio improprio ; procediamo senza farci condizionare da questa osservazione. Passando in coordinate polari, si ottiene :

$$\int_0^{\infty} r \, e^{-r^2} \, dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

(Infatti , per descrivere il piano in coordinate polari occorre che r vari in [0 , ∞) e θ in [0 , 2π]).
Svolgendo i calcoli nel modo consueto , si ottiene :

$$2\pi \left[-e^{-r^2}/2 \right]_{r=0}^{\infty} = \sqrt{\pi} \left[-e^{-r^2}/2 \right]_{r=0}^{\infty} = \pi \, . \quad .$$

In conclusione , $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$.