Soluzioni della prova scritta parziale n.4 del 29. 5. 06 - Fila 1

1.

L'unico punto di discontinuità della funzione è $-\pi/2$, punto in cui la funzione diventa infinita. Stabiliamo l'ordine dell'infinito (con la formula di Taylor).

$1 + \cos x \approx 1$ $\quad\quad$ $\operatorname{sen} x \approx -1 + (x + \pi/2)^2/2$ $\quad\quad$ $f(x) \approx 2/(x+\pi/2)^2$

La funzione è un infinito di ordine 2 e dunque l'integrale non esiste.

Per calcolare esplicitamente l'integrale, poniamo $t = \operatorname{tg} x/2$; si ottiene :

$$\int_{-1}^{0} \frac{4}{(t+1)^2(1+t^2)}\, dt \ .$$

Scomponiamo la funzione integrando con il metodo di Hermite :

$$\frac{4}{(t+1)^2(1+t^2)} = \frac{2}{t+1} + \frac{-2t}{t^2+1} + \left(\frac{-2}{t+1}\right)'.$$

Integrando, si ottiene :

$$\Big[\ 2\log|t+1| - \log(t^2+1) - 2/(t+1)\Big]_{-1}^{0} =$$

$$\left[\frac{2(t+1)\log|t+1| - 2}{t+1} - \log(t^2+1)\right]_{-1}^{0}$$

Poiché per $t \to -1$ si ha $(t+1)\log|t+1| \to 0$, l'integrale diverge.

2.

Risolviamo prima l'equazione omogenea. Il polinomio caratteristico associato $k^2 + 4$ ha radici complesse $k = \pm 2i$, a cui corrispondono per l'equazione differenziale le soluzioni $\cos 2x$, $\operatorname{sen} 2x$.
Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma $(Ax + B)e^{2x}$.
Calcolando le derivate e sostituendo nell'equazione, si trova $A = 1/8$, $B = 1/16$.
L'integrale generale dell'equazione ha dunque la forma

$$y(x) = \frac{1}{16}(2x+1)e^{2x} + c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x \ .$$

Calcoliamo la derivata :

$$y'(x) = \frac{1}{4}(x+1)e^{2x} - 2c_1 \operatorname{sen} 2x + 2c_2 \cos 2x.$$

Imponendo le condizioni iniziali, si trova che deve essere $c_1 = -1/16$, $c_2 = 3/8$.

3.

La serie è a segno positivo. Per $x = 0$ diventa le serie nulla e dunque converge. Per $x \neq 0$ applichiamo il criterio del rapporto, dopo aver osservato che $\dfrac{x^{2n}}{\sqrt{n+n^3}} \approx \dfrac{x^{2n}}{n^{3/2}}$:

$$\frac{x^{2n+2}}{(n+1)^{3/2}} \;/\; \frac{x^{2n}}{n^{3/2}} \;\to\; x^2 .$$

Dunque la serie converge per $-1 < x < 1$, diverge per $x > 1$ e per $x < -1$.

Per $x = \pm 1$ il termine generale della serie diventa $\dfrac{1}{\sqrt{n+n^3}} \approx \dfrac{1}{n^{3/2}}$ e dunque converge.

Soluzioni della prova scritta parziale n.4 del 29. 5. 06 - Fila 2

1.

L'unico punto di discontinuità della funzione è $\pi/2$, punto in cui la funzione diventa infinita. Stabiliamo l'ordine dell'infinito (con la formula di Taylor).

$1 - \cos x \approx 1$ $\qquad$ $\operatorname{sen} x \approx 1 - (x - \pi/2)^2/2$ $\qquad$ $f(x) \approx 2 / (x - \pi/2)^2$

La funzione è un infinito di ordine 2 e dunque l'integrale non esiste.

Per calcolare esplicitamente l'integrale, poniamo $t = \operatorname{tg} x/2$; si ottiene :

$$\int_0^1 \frac{4t^2}{(t-1)^2(1+t^2)}\, dt .$$

Scomponiamo la funzione integrando con il metodo di Hermite :

$$\frac{4t^2}{(t-1)^2(1+t^2)} = \frac{-2}{t-1} + \frac{2t}{t^2+1} + \left(\frac{2}{t-1}\right)' .$$

Integrando, si ottiene :

$$\Big[\, -2\log|t-1| + \log(t^2+1) + 2/(t-1) \,\Big]_0^1 =$$

$$\left[\, \frac{-2(t-1)\log|t-1| + 2}{t-1} + \log(t^2+1) \,\right]_0^1$$

Poiché per $t \to 1$ si ha $(t-1)\log|t-1| \to 0$, l'integrale diverge.

2.

Risolviamo prima l'equazione omogenea. Il polinomio caratteristico associato $k^2 + 9$ ha radici complesse $k = \pm 3i$, a cui corrispondono per l'equazione differenziale le soluzioni $\cos 3x$, $\operatorname{sen} 3x$.
Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma $(Ax + B)e^{3x}$.
Calcolando le derivate e sostituendo nell'equazione, si trova $A = -1/18$, $B = 2/27$.
L'integrale generale dell'equazione ha dunque la forma

$$y(x) = \left(\frac{2}{27} - \frac{1}{18}x\right)e^{3x} + c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x.$$

Calcoliamo la derivata :

$$y'(x) = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}x\right)e^{3x} - 3c_1 \operatorname{sen} 3x + 3c_2 \cos 3x.$$

Imponendo le condizioni iniziali, si trova che deve essere $c_1 = 25/27$, $c_2 = -1/18$.

3.

La serie è a segno positivo. Per $x = 0$ diventa le serie nulla e dunque converge. Per $x \neq 0$ applichiamo il criterio del rapporto, dopo aver osservato che $\frac{x^{2n}}{\sqrt[3]{n^2 + n^4}} \approx \frac{x^{2n}}{n^{4/3}}$:

$$\frac{x^{2n+2}}{(n+1)^{4/3}} \Big/ \frac{x^{2n}}{n^{4/3}} \rightarrow x^2.$$

Dunque la serie converge per $-1 < x < 1$, diverge per $x > 1$ e per $x < -1$.
Per $x = \pm 1$ il termine generale della serie diventa $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + n^4}} \approx \frac{1}{n^{4/3}}$ e dunque converge.