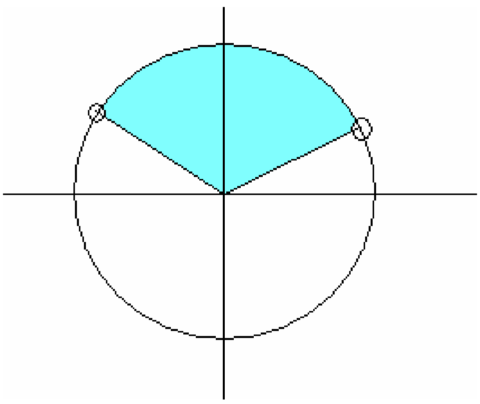
Soluzioni [1]

1.

La funzione è periodica di periodo 2π ; possiamo dunque limitarci a studiarla per $x \in [0, 2\pi]$.

C.E. deve essere $\text{sen } x \neq -1/2$ e dunque $x \neq 7\pi/6$, $x \neq 11\pi/6$

SGN $f(x) \geq 0$ se $|\text{sen } x + 1/2| \geq 1$
cioè $\text{sen } x + 1/2 \geq 1$ oppure $\text{sen } x + 1/2 \leq -1$
cioè $\text{sen } x \geq 1/2$ oppure $\text{sen } x \leq -3/2$.
La seconda disequazione non ha soluzioni , la prima è verificata per $x \in \left[\pi/6 , 5\pi/6 \right]$; questo è l'intervallo di positività della funzione , che si annulla agli estremi.

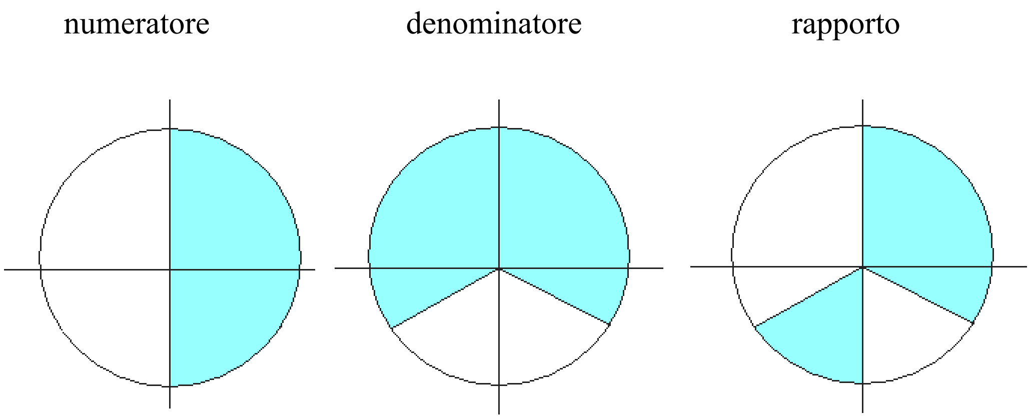


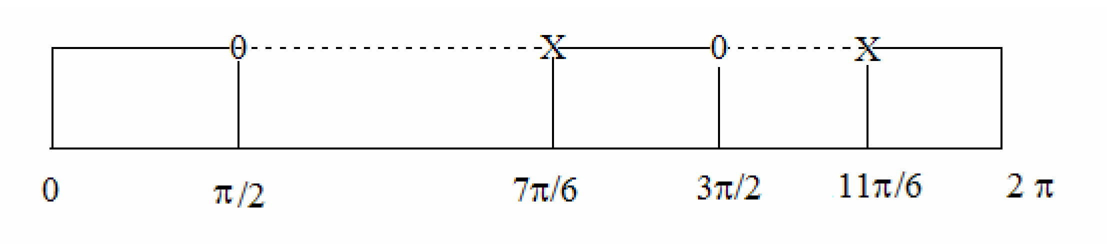
LIM per $x \to 7\pi/6$ e per $x \to 11\pi/6$ $f(x) \to -\infty$

valori notevoli :

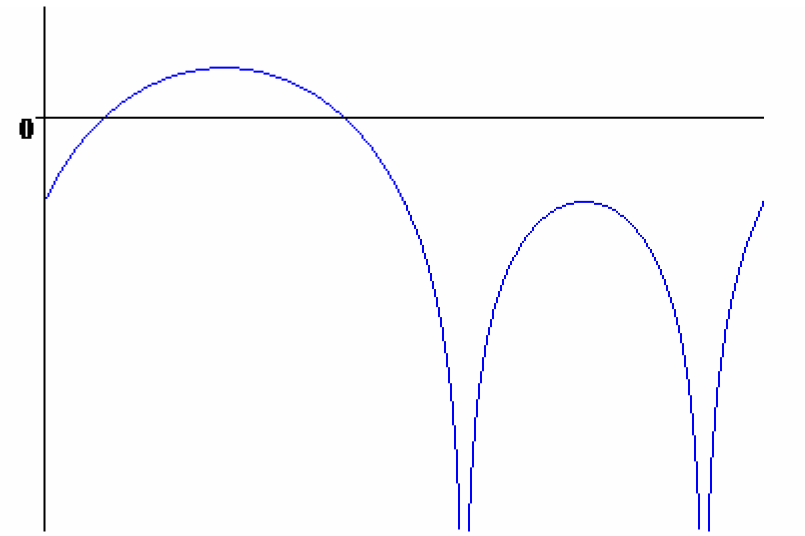
$f(0) = f(\pi) = f(3\pi/2) = f(2\pi) = -\log 2$, $f(\pi/2) = \log 3/2$

DRV $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x + 1/2}$





DRV^2 $\quad f''(x) = \dfrac{-1 - \operatorname{sen} x/2}{(\operatorname{sen} x + 1/2)^2}$, sempre negativa



2.

(i) Per $x \to +\infty \quad f(x) \sim \dfrac{\log x}{x^5} < \dfrac{x^\alpha}{x^5} = \dfrac{1}{x^{5-\alpha}}$

Scegliendo α in modo che sia $5 - \alpha > 1$ (cioè $\alpha < 4$) , dal criterio del confronto si deduce l'esistenza dell'integrale dato.

(ii) Per calcolare il valore dell'integrale, poniamo

$$x^4 = t \quad , \quad x = t^{1/4} \quad , \quad 4\, x^3\, dx = dt$$

in modo da ottenere

$$\frac{1}{16} \int_1^{+\infty} \frac{\log t}{(1+t)^2}\, dt\, .$$

A questo punto si integra per parti :

$$\frac{1}{16} \left\{ \left[\!\left[-\frac{\log t}{1+t} \right]\!\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\,(1+t)} \right\} =$$

$$\frac{1}{16} \int_1^{+\infty} \left(-\frac{1}{1+t} + \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{16} \left[\!\left[\log \frac{t}{1+t} \right]\!\right]_1^{+\infty} = \frac{\log 2}{16}\, .$$

3.

L'equazione è a variabili separate.
E' definita per $x \in \mathbf{R}$ e per $y \in [-1 , 1]$.
Le funzioni $y(x) = 1$ e $y(x) = -1$ sono soluzioni costanti.
Per trovare le altre soluzioni, separiamo le variabili e integriamo:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}} = \int_{x_0}^{x} ds \ \Rightarrow\ \operatorname{arcsen} y = x - c \ \Rightarrow\ y = \operatorname{sen}(x - c).$$

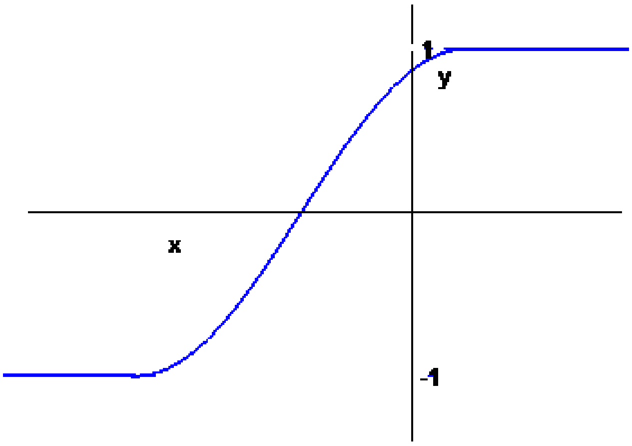
L'ultimo passaggio è valido purché sia $-\pi/2 < x - c < \pi/2$, cioè

$$-\pi/2 + c < x < \pi/2 + c$$

e questo fornisce l'intervallo di definizione delle soluzioni , in funzione della costante arbitraria c.
Se nell'equazione $\operatorname{arcsen} y = x - c$ imponiamo la condizione iniziale , si trova che deve essere $c = -\pi/3$. Si ottiene dunque la soluzione

$$y(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/3)\ , \quad x \in (-5\pi/6 , \pi/6)$$

che si prolunga nella soluzione costante $y = 1$ per $x > \pi/6$ e nella soluzione costante $y = -1$ per $x < -5\pi/6$.



4.

Poiché $\dfrac{3+\ n^2}{1+n^2} \ \rightarrow\ 1$, risulta

$$a_n \ \sim\ n\left(\frac{3+n^2}{1+n^2} - 1\right) \ =\ \frac{2\,n}{1+n^2} \ \sim\ \frac{2}{n}\ .$$

Da questo segue (i) $a_n \rightarrow 0$, (ii) $\sum_n a_n$ diverge.

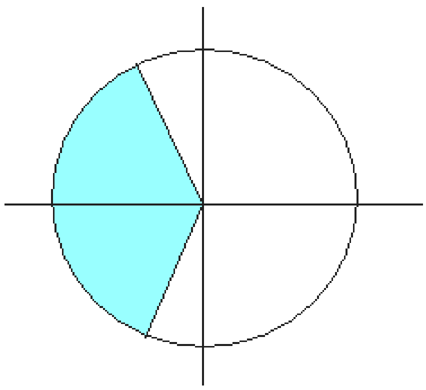
Soluzioni [2]

1.

La funzione è periodica di periodo 2π ; possiamo dunque limitarci a studiarla per $x \in [0, 2\pi]$.

C.E. deve essere $\cos x \neq 1/2$ e dunque $x \neq \pi/3$, $x \neq 5\pi/3$

SGN $f(x) \geq 0$ se $\left| \cos x - 1/2 \right| \geq 1$
cioè $\cos x - 1/2 \geq 1$ oppure $\cos x - 1/2 \leq -1$
cioè $\cos x \geq 3/2$ oppure $\cos x \leq -1/2$.
La prima disequazione non ha soluzioni, la seconda è verificata per $x \in \left[2\pi/3 , 4\pi/3 \right]$; questo è l'intervallo di positività della funzione , che si annulla agli estremi.



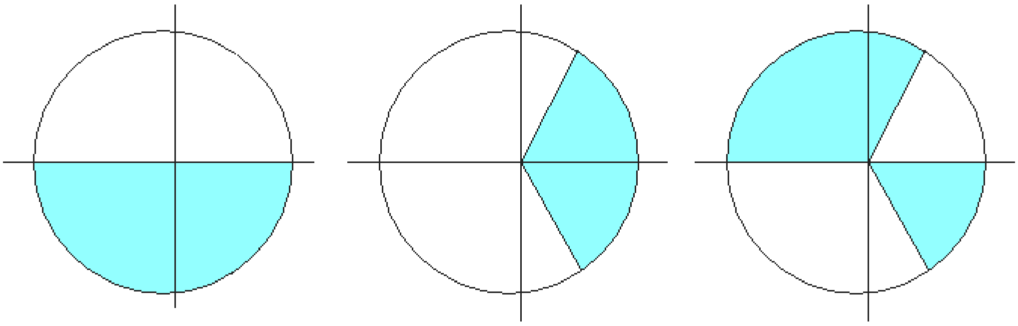
LIM per $x \to \pi/3$ e per $x \to 5\pi/3$ $\quad f(x) \to -\infty$

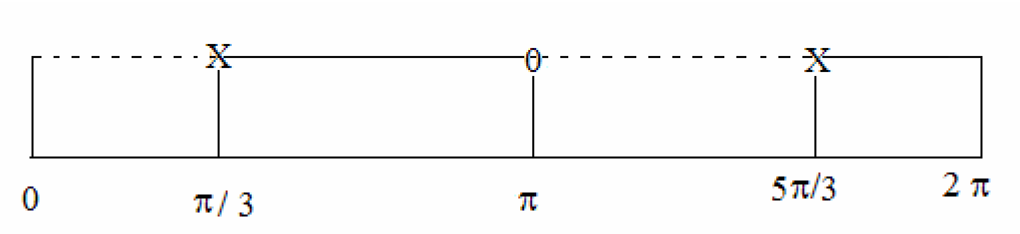
valori notevoli :

$f(0) = f(\pi/2) = f(3\pi/2) = f(2\pi) = -\log 2$, $f(\pi) = \log 3/2$

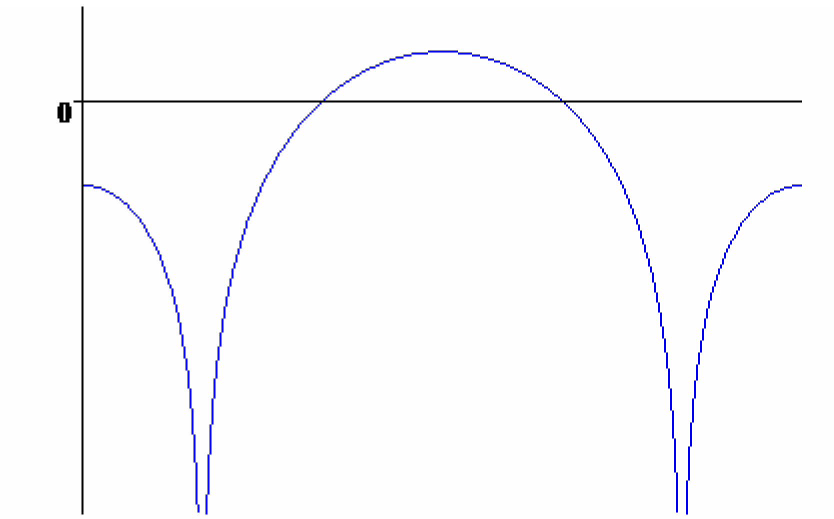
DRV $f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x - 1/2}$

numeratore denominatore rapporto





DRV^2 $\qquad f''(x) = \dfrac{-1 + \cos x /2}{(\cos x - 1/2)^2}$, sempre negativa



2.

(i) Per $x \to +\infty \quad f(x) \sim \dfrac{3 \log x}{x^4} < \dfrac{3\, x^{\alpha}}{x^4} = \dfrac{3}{x^{4-\alpha}}$

Scegliendo α in modo che sia $4 - \alpha > 1$ (cioè $\alpha < 3$) , dal criterio del confronto si deduce l'esistenza dell'integrale dato.

(ii) Per calcolare il valore dell'integrale, poniamo

$$x^3 = t \quad , \quad x = t^{1/3} \quad , \quad 3\,x^2\,dx \;=\; dt$$

in modo da ottenere

$$\frac{1}{3}\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{(\,1+t\,)^2}\,dt\,.$$

A questo punto si integra per parti :

$$\frac{1}{3}\left\{ \left[\!\!\left[\, -\frac{\log t}{1+t} \,\right]\!\!\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\,(\,1+t\,)} \right\} =$$

$$\frac{1}{3}\int_1^{+\infty}\left(-\frac{1}{1+t} + \frac{1}{t} \right) dt \;=\; \frac{1}{3}\left[\!\!\left[\, \log\frac{t}{1+t} \,\right]\!\!\right]_1^{+\infty} \;=\; \frac{\log 2}{3}\,.$$

3.

L'equazione è a variabili separate.
E' definita per $x \in \mathbf{R}$ e per $y \in (\,0\,, +\infty\,)$.
Non esistono soluzioni costanti.
Per trovare le soluzioni, separiamo le variabili e integriamo:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{s\,(\,1+\log^2 s\,)} \;=\; \int_{x_0}^{x} ds \;\Rightarrow\; \int_{\log y_0}^{\log y} \frac{dt}{1+t^2} \;=\; \int_{x_0}^{x} ds$$

(nel primo integrale abbiamo posto $\log s = t$, $ds\,/\,s \;=\; dt$)

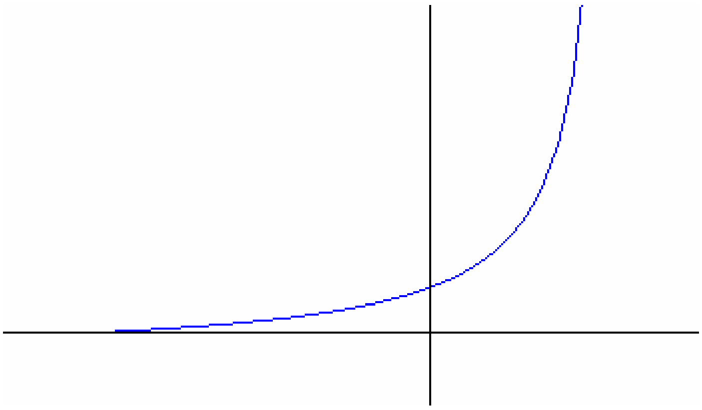
$$\operatorname{arctg}\log y \;=\; x - c \;\;\Rightarrow\;\; \log y = \operatorname{tg}(\,x-c\,) \;\;\Rightarrow\;\; y\,(\,x\,) \;=\; e^{\operatorname{tg}(\,x-c\,)}\,.$$

Il primo passaggio è valido purché sia $-\pi\,/\,2 < x - c < \pi\,/\,2$, cioè

$$-\pi\,/\,2 + c \;<\; x \;<\; \pi\,/\,2 + c$$

e questo fornisce l'intervallo di definizione delle soluzioni , in funzione della costante arbitraria c.
Se nell'equazione $\operatorname{arctg}\log y = x - c$ imponiamo la condizione iniziale , si trova che deve essere $c = -\pi\,/\,4$. Si ottiene dunque la soluzione

$$y(x) = e^{\operatorname{tg}(x+\pi/4)}, \quad x \in (-3\pi/4, \pi/4).$$



4.

Poiché $\dfrac{1+n^3}{3+n^3} \to 1$, risulta

$$a_n \sim n\left(\frac{1+n^3}{3+n^3} - 1\right) = n\,\frac{-2}{3+n^3} \sim -\frac{2}{n^2}.$$

Da questo segue (i) $a_n \to 0$, (ii) $\sum_n a_n$ converge.