Soluzioni

1.

C.E. $\quad x > 0 \;,\; x \neq 1$

SGN $\quad$ sempre positiva ; $f(x) = 0$ per $x = e^{-1}$

LIM $\quad$ per $x \to 0 \quad f(x) \to 0$ (discontinuità eliminabile)

per $x \to 1 \quad f(x) \to +\infty$ (asintoto verticale)

per $x \to +\infty \quad f(x) \to +\infty$ (senza asintoto : $f(x) \sim \sqrt{x}$)

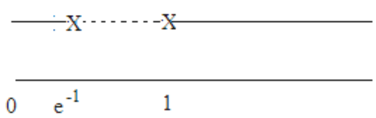
DRV
$$f'(x) = \frac{\log^2 x + \log x - 2}{2\sqrt{x}\,\log^2 x}\ \operatorname{sgn}\left(1 + \frac{1}{\log x}\right)$$

$x = e^{-1}$ punto angoloso (per $x \to e^{-1^{\pm}}$ $f(x) \to \mp\sqrt{e}$)

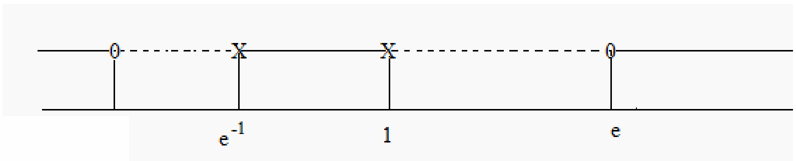
per $x \to 0 \quad f'(x) \sim 1 / 2\sqrt{x} \to +\infty$ (punto a tangente verticale)

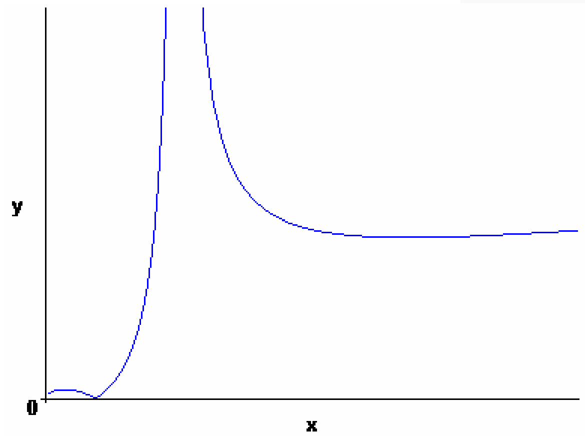
$$\operatorname{sgn} \frac{\log^2 x + \log x - 2}{2\sqrt{x}\,\log^2 x}$$

$$\operatorname{sgn}\left(1 + \frac{1}{\log x}\right)$$



sgn f '





2.

$$\text{Per } x \to +\infty \quad |f(x)| \le \frac{\operatorname{arctg} x}{(1 + x^2)\,x^2} \sim \frac{\pi}{2\,x^4}$$

$$\text{per } x \to 0 \quad f(x) \sim \frac{x^2}{x^2} \to 1$$

Dunque l'integrale esiste perché all'infinito la funzione è infinitesima di ordine 4 e perché $x = 0$ è una discontinuità eliminabile.

3.

C.E. $x \in R \quad , \quad -1 \leq y \leq 1 \quad y \neq 0$

Soluzioni costanti $y = \pm 1$

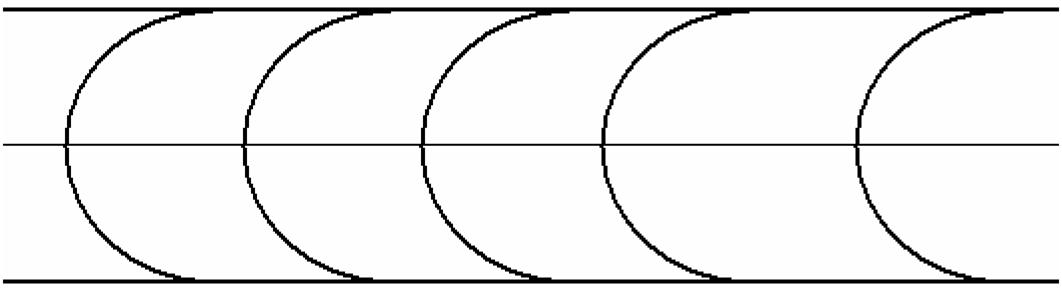
Ricerca soluzioni non costanti:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{s}{\sqrt{1 - s^2}}\, ds = \int_{x_0}^{x} ds \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 - y_0^2} - \sqrt{1 - y^2} = x - x_0 \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{1 - y^2} = c - x \quad (*) \qquad \Rightarrow \quad 1 - y^2 = (c - x)^2 \quad \text{con } c - x > 0 \quad \Rightarrow$$

$$y = \pm \sqrt{1 - (c - x)^2} \quad \text{con } (c - x)^2 < 1 .$$

Mettendo insieme le condizioni , risulta che deve essere $c - 1 < x < c$.
Le soluzioni formano semicirconferenze di centro (c , 0) e raggio 1 .



Inserendo in (*) la condizione iniziale si trova che deve essere $c = \sqrt{3}/2$.

4.

$\operatorname{sen}(3x^2) = 3x^2 - 9x^6/2 + \ldots \qquad \log(1 + x^3) = x^3 - x^6/2 + \ldots$

$1 - \cos x^2 = x^4/2 + \ldots \qquad f(x) \sim \dfrac{3x^6/2}{x^6/2} \to 3 .$