Prova scritta dell'8. 01. 08

Soluzioni

1.

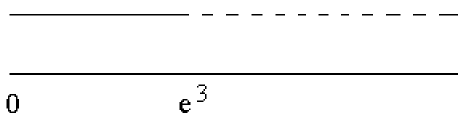
La funzione è dispari e quindi basta studiarla per $x \geq 0$ (per le $x < 0$ il grafico si ottiene mediante simmetria rispetto all'origine) ; i risultati successivi si riferiscono a questa restrizione.

C.E. $\quad x \neq 0$

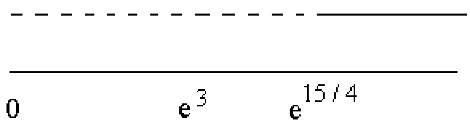
SGN $\quad$ positiva per $x > 1$, negativa per $0 < x < 1$, nulla per $x = 1$

LIM $\quad$ per $x \to 0^+$ $\quad f(x) \to -\infty$ (asintoto verticale)
per $x \to +$ $\quad f(x) \to 0$ (asintoto orizzontale)

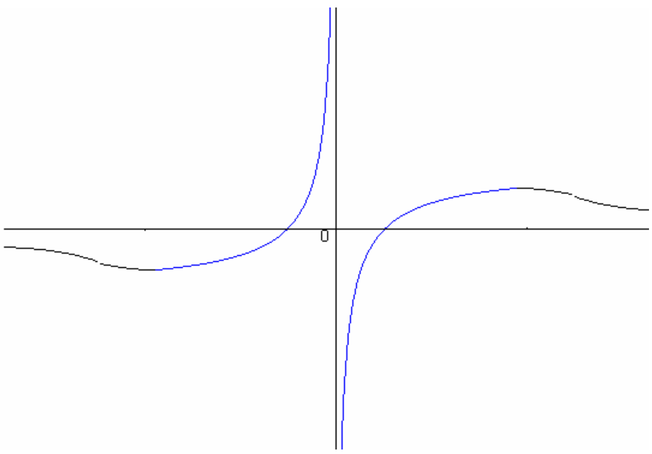
DRV $\quad$ $f'(x) = \dfrac{3 - \log x}{x^{4/3}}$



DRV ^{2} $\quad$ $f''(x) = \dfrac{4 \log x - 15}{9\, x^{7/3}}$



$x = e^3$ punto di massimo assoluto , $f(e^3) = 3 / e$
$x = e^{15/4}$ punto di flesso



Per quanto riguarda la maggiorazione indicata , questa si può riscrivere nella forma $f(x) \le c \quad \forall\, x > 0$. La migliore costante c è il più piccolo dei maggioranti di $f(x)$, cioè sup f . Poiché esiste $\max f = f(e^3) = 3/e$, questo è il valore richiesto.

2.

(a)

L'integrale è improprio per la presenza dell'estremo 12 che annulla il denominatore. Ponendo $\sqrt{4+x} = t$ e quindi $x = t^2 - 4$ e $dx = 2t\,dt$, l'integrale diventa :

$$\int_2^4 \frac{2t(t-3)}{4-t}\,dt = \int_2^4 \left(-2t - 2 + \frac{8}{4-t} \right) dt = \Big[\!\Big[-t^2 - 2t - 8\log|4-t| \Big]\!\Big]_2^4$$

Si trova in questo modo che l'integrale NON esiste finito.
Per quanto riguarda la prima uguaglianza , è stata ottenuta a partire dalla divisione del numeratore $2t(t-3)$ per il denominatore $4-t$, che fornisce

$$2t(t-3) = (-2t-2)(4-t) + 8 .$$

(b)

Che l'integrale $\displaystyle\int_2^4 \frac{2t(t-3)}{4-t}\,dt$ non esista finito si può stabilire a priori osservando che per $t \to 4$ risulta $f(t) \approx 8/(4-t)$ che è un infinito di ordine 1.
Alla stessa conclusione si arriva partendo direttamente dall'integrale nella x e osservando che per $x \to 12$ risulta

$$f(x) \approx \frac{(\sqrt{4+x} - 3)(4 + \sqrt{4+x})}{12-x} \approx \frac{8}{12-x}$$

che è un infinito di ordine 1.

(c)

Per calcolare l'area richiesta , occorre studiare il segno della funzione nell'intervallo $[0, 6]$. In questo intervallo il numeratore è positivo per $x > 5$, mentre il denominatore è sempre positivo. Dunque l'area è data da

$$- \int_0^5 f(x)\,dx + \int_5^6 f(x)\,dx$$

ovvero , ripetendo il c. di v. $\sqrt{4+x} = t$:

$$- \int_2^3 \frac{t-3}{4-t}\, 2t\ dt + \int_3^{\sqrt{10}} \frac{t-3}{4-t}\, 2t\ dt =$$

$$\Big[\!\Big[-t^2 - 2t - 8 \log | 4 - t | \Big]\!\Big]_2^3 + \Big[\!\Big[-t^2 - 2t - 8 \log | 4 - t | \Big]\!\Big]_3^{\sqrt{10}} =$$

$$12 - 2\sqrt{10} - 8 \log (2 (4 - \sqrt{10})) \quad \sim \ 2 - x^2 + x^4 / 12$$

3.

Il polinomio caratteristico $k^2 - 2k + 5$ ha per radici la coppia coniugata di numeri complessi $1 \pm 2i$, a cui corrispondono le soluzioni $e^x \cos 2x$, $e^x \operatorname{sen} 2x$.
Cerchiamo una soluzione dell'equazione completa nella forma $(Ax + B)\, e^x$; calcolando le derivate e sostituendo nell'equazione , si trova che deve essere $B = 0$, $A = 1/4$. L'integrale generale dell'equazione è dunque dato da

$$y(x) = e^x (a \cos 2x + b \operatorname{sen} 2x + x/4) .$$

Le condizioni iniziali portano al sistema $a = 0$, $a + 2b + ¼ = 0$, da cui segue $a = 0$, $b = -1/8$; la soluzione è dunque

$$y(x) = e^x (2x - \operatorname{sen} 2x) / 8 .$$

4.

Scriviamo α e β in forma esponenziale .
Per quanto riguarda α , deve essere $r = 2$, $\cos\theta = \sqrt{3}/2$, $\operatorname{sen}\theta = -1/2$ e dunque $\alpha = 2 e^{-i\pi/6}$.
Si ha poi

$$\beta = \frac{3 - i}{-1 + 2i} = \frac{(3 - i)(-1 - 2i)}{5} = -1 - i$$

e dunque deve essere $r = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta = -1/\sqrt{2}$, cioè $\beta = \sqrt{2}\, e^{5\pi i/4}$.
L'equazione da risolvere diventa dunque

$$4\, e^{-i\pi/3}\, r^6 e^{6i\theta} = \sqrt{2}\, e^{5\pi i/4} \quad \text{cioè} \quad 4\, r^6\, e^{(6\theta - \pi/3)i} = \sqrt{2}\, e^{5\pi i/4} \; .$$

Da questa si deduce che deve essere

$$r^6 = 2^{-3/2} \quad \text{cioè} \quad r = 2^{-1/4}$$

$$6\theta - \pi/3 = 5\pi/4 + 2k\pi \quad \text{cioè} \quad \theta = 19\pi/24 + k\pi/3 \quad \text{con } k = 0, \ldots, 5.$$