Analisi Matematica – Corsi A , B , R

Prova scritta parziale n.4 del 4. 6. 08

Soluzioni [1]

1.

Nel dominio assegnato non esistono soluzioni costanti.
Separando le variabili e integrando, si ottiene:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{\cos s} = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{\operatorname{tg} s} .$$

Calcoliamo gli integrali indefiniti:

$$\int \frac{ds}{\cos s} = \int \frac{\cos s}{1 - \operatorname{sen}^2 s}\, ds \underset{\operatorname{sen} s = t}{=} \int \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 - t} + \frac{1}{1 + t} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| + c = \log \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} s}{1 - \operatorname{sen} s}} + c$$

$$\int \frac{\cos s}{\operatorname{sen} s}\, ds \underset{\operatorname{sen} s = t}{=} \int \frac{dt}{t} = \log | t | + c = \log | \operatorname{sen} s | + c .$$

Utilizzando questi risultati , si ottiene :

$$\bar{y} = \operatorname{arcsen} \frac{4 \operatorname{sen}^2 x - 1}{4 \operatorname{sen}^2 x + 1} \log \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} y}{1 - \operatorname{sen} y}} = \log | \operatorname{sen} x | + \log k \qquad (k > 0)$$

cioè

$$\log \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} y}{1 - \operatorname{sen} y}} = \log (k | \operatorname{sen} x |)$$

da cui si deducono le soluzioni in forma implicita (il lettore può ricostruire senza difficoltà i passaggi non riportati):

$$\operatorname{sen} y = \frac{k^2 \operatorname{sen}^2 x - 1}{k^2 \operatorname{sen}^2 x + 1} .$$

Esplicitando :

$$y = \operatorname{arcsen} \frac{k^2 \operatorname{sen}^2 x - 1}{k^2 \operatorname{sen}^2 x + 1} .$$

La condizione iniziale è verificata per $k^2 = 4$ e fornisce la soluzione

$$\bar{y} = \arcsen \frac{4 \sen^2 x - 1}{4 \sen^2 x + 1} .$$

E' facile vedere che la soluzione trovata è definita in tutto il dominio assegnato.

2.

L'integrale è improprio perché la funzione diventa infinita ai due estremi .
Per $x \to 0 \quad f(x) \sim 1 / (2\sqrt{x})$, per $x \to 4 \quad f(x) \sim 1 / (2\sqrt{4-x})$; in entrambi i casi la funzione diverge di ordine ½ e dunque l'integrale esiste.
Per calcolarne il valore, cominciamo usando la tecnica del completamento del quadrato:

$$x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 4 .$$

Dunque :

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} \underset{x-2 = 2 \sen t}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi .$$

3

Per x = 0 la serie è nulla : dunque converge ed ha per somma 0.
La serie è a segno costante positivo se $x > 0$, a segno alterno se $x < 0$.

$$|a_n| = 3^n |x|^n \left(1 - \cos \frac{2n+1}{3n^2+4} \right) \sim 3^n |x|^n \left(1 - \cos \frac{2}{3n} \right) \sim \frac{2}{9} \frac{3^n |x|^n}{n^2}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to 3|x| .$$

Dunque :

se $|x| < 1/3$ la serie converge
se $|x| > 1/3$ la serie non converge (in particolare, diverge se $x > 1/3$).

Per i valori non contemplati dal criterio della radice :

se $x = 1/3$ $\quad a_n \sim 2 / (9 n^2)$ e la serie converge
se $x = -1/3$ $\quad$ la serie converge per il teorema di Leibniz.

Soluzioni [2]

1.

Nel dominio assegnato non esistono soluzioni costanti.
Separando le variabili e integrando, si ottiene:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{s \log s} = \int_{x_0}^{x} \frac{\log s + 1}{\log s} ds. \ .$$

Calcoliamo gli integrali, ponendo in entrambi i casi $\log s = t$, $ds / s = dt$:

$$\int_{\log y_0}^{\log y} \frac{dt}{t} = \int_{\log x_0}^{\log x} \frac{t+1}{t} dt.$$

$$\log \log y - \log \log y_0 = \log x + \log \log x - \log x_0 - \log \log x_0$$

(nel dominio assegnato i valori assoluti sono supeflui)

$$\log \log y = \log (k x \log x) \qquad (\text{con } k > 0)$$

$$\log y = k x \log x .$$

Esplicitando :

$$y = \exp (k x \log x) .$$

La condizione iniziale è verificata per $k = 2 / e$; in questo modo si ottiene la soluzione:

$$\bar{y} = \exp (2 x \log x / e) .$$

E' immediato vedere che la soluzione trovata è definita in tutto il dominio assegnato.

2.

L'integrale è improprio perché la funzione diventa infinita ai due estremi .
Per $x \to 0$ $f(x) \sim 1 / \sqrt{(8x)}$, per $x \to 8$ $f(x) \sim 1 / \sqrt{[8(8-x)]}$; in entrambi i casi la funzione diverge di ordine ½ e dunque l'integrale esiste.
Per calcolarne il valore, cominciamo usando la tecnica del completamento del quadrato:

$$x^2 - 8x = x^2 - 8x + 16 - 16 = (x-4)^2 - 16 .$$

Dunque :

$$\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt{16 - (x-4)^2}} \underset{x - 4 = 4 \text{ sen } t}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi .$$

3

Per x = 0 la serie è nulla : dunque converge ed ha per somma 0.
La serie è a segno costante positivo se x > 0 , a segno alterno se x < 0.

$$|a_n| \sim 5^n |x|^n \left(\exp \frac{1}{3n^2} - 1 \right) \sim \frac{5^n |x|^n}{3n^2}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to 5 |x| .$$

Dunque :

se $|x| < 1/5$ la serie converge
se $|x| > 1/5$ la serie non converge (in particolare, diverge se $x > 1/5$).

Per i valori non contemplati dal criterio della radice :

se $x = 1/5$ $a_n \sim 1 / (3 n^2)$ e la serie converge
se $x = -1/5$ la serie converge per il teorema di Leibniz.