Soluzioni della prova parziale #4 del 26.5.2010

[1]

1. Il polinomio caratteristico k^3+2k^2+10k ha per radici $k=0$, $k=-1\pm 3i$; in corrispondenza, una base dello spazio delle soluzioni dell'eq. omogenea è data da $\{1,\ e^{-x}\cos 3x,\ e^{-x}\operatorname{sen} 3x\}$.
Una soluzione particolare dovuta al termine noto polinomiale è della forma $\bar{y}_1 = x(Ax^3+Bx^2+Cx+D)$; imponendo che risolva l'eq., si ottiene $A=1$, $B=-1$, $C=-1$, $D=1/5$.
Per trovare una soluzione particolare dovuta al termine trigonometrico, si passa in campo complesso. Si cerca una sol. complessa $\bar{z} = A e^{2ix}$: sostituendo nell'eq., si ottiene $A = \frac{2+3i}{2}$. Di questa soluzione si prende la parte immaginaria.
In conclusione: $y(x) = c_1 + e^{-x}(c_2\cos 3x + c_3 \operatorname{sen} 3x) +$
$+ x(x^3 - x^2 - x + \frac{1}{5}) + \frac{1}{2}(3\cos 2x + 2\operatorname{sen} 2x)$.

2. La serie è definita per $x \geq 0$.
Criterio del rapporto: $|a_{n+1}|/|a_n| = |\sqrt{x}-1|\,\frac{(3n+1)(3n+2)}{(3n+4)(3n+5)} \to |\sqrt{5}-1|$.
La serie converge per $0<x<4$, non converge per $x>4$.
Per $x=0$: $a_n = (-1)^n/(3n+1)(3n+2)$; converge per il t. di Leibniz
Per $x=4$: $a_n = 1/(3n+1)(3n+2) \sim 1/9n^2$; converge.

3. Per $x\to+\infty$, $f(x) \sim \frac{1}{e^x} < \frac{1}{x^\alpha}$. Scegliendo $\alpha>1$, si deduce l'integrabilità.

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx \underset{\substack{e^x=t\\ e^x dx = dt}}{=} \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + c = \operatorname{arctg} e^x + c$$

$$\int \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx \underset{\substack{e^x=t\\ x=\lg t\\ dx = 1/t\, dt}}{=} \int \frac{1}{t(t^2+1)}\,dt = \int \frac{t}{t^2(t^2+1)}\,dt \underset{z=t^2}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z(z+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right) dz = \frac{1}{2}\lg\left|\frac{z}{z+1}\right| + c = \lg \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} + c$$

[2]

1. Polinomio caratteristico $k^3 - k^2 + 4k - 4 = k^2(k-1) + 4(k-1) = (k-1)(k^2+4)$.
Alle radici $1, \pm 2i$ corrisponde per lo spazio delle soluzioni dell'eq. omogenea la base $\{e^x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x\}$.
Una soluzione particolare dovuta all'esponenziale è del tipo $\bar{y}_1 = A x e^x$.
Sostituendo nell'eq., si ottiene $A = 1$.
Per trovare una soluzione particolare dovuta alla fz. trigonometrica, si passa in campo complesso: la sol. deve essere della forma $A e^{ix}$.
Sostituendo, si ottiene $A = -1 - i$. Di questa soluzione complessa così ricavata, interessa la parte reale. In conclusione:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \operatorname{sen} 2x + x e^x - \cos x + \operatorname{sen} x.$$

2. La serie è definita per $x > 0$.
Criterio del rapporto: $|a_{n+1}| / |a_n| = |\lg x| \frac{n+6}{n+2} \to |\lg x|$.
La serie converge se $1/e < x < e$; non converge se $0 < x < 1/e$ opp. $x > e$.
Per $x = e$, $a_n = (n+5)!/(n+1)!$
Per $x = 1/e$, $a_n = (-1)^n (n+5)!/(n+1)!$
In entrambi i casi la serie non converge, non essendo verificata la condizione iniziale.

3. Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{x}{x} \to 1$; dunque l'integrale non esiste.
Per il calcolo esplicito, si pone

$$\sqrt{1+x} = t$$
$$x = t^2 - 1$$
$$dx = 2t\,dt,$$

ottenendo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{(t^2-1)\,2t}{(t+1)^2}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{2t\,(t-1)}{t+1}\,dt = \int_1^{+\infty} \left(2t - 4 + \frac{4}{t+1}\right) dt$$

$$= \Big[t^2 - 4t + 4 \lg |t+1|\Big]_{t=1}^{+\infty} \to +\infty.$$