Soluzioni

1. Eq. differenziale lineare del I ordine.
C.E. $x > 0$
Risolviamo l'eq. nel modo consueto: $a(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $A(x) = 2\sqrt{x}$.

$$\left(e^{2\sqrt{x}}\, y\right)' = \sqrt{x}\, e^{2\sqrt{x}}$$

$$\int \sqrt{x}\, e^{2\sqrt{x}}\, dx \underset{\substack{\sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt}}{=} 2\int t^2 e^{2t}\, dt \underset{\text{per parti}}{=} \left(t^2 - t + \tfrac{1}{2}\right)e^{2t} + c = \left(x - \sqrt{x} + \tfrac{1}{2}\right)e^{2\sqrt{x}} + c$$

$$y = x - \sqrt{x} + \frac{1}{2} + c\, e^{-2\sqrt{x}}.$$

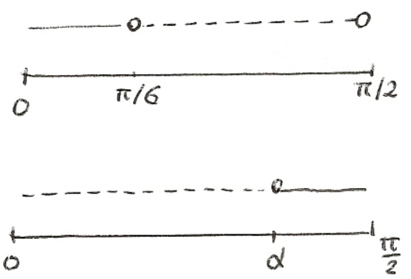
2. La fz è di periodo π, quindi basta studiarla - ad es. - in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
La fz. è pari, quindi basta studiarla per $x \geq 0$.
In conclusione, possiamo studiare:

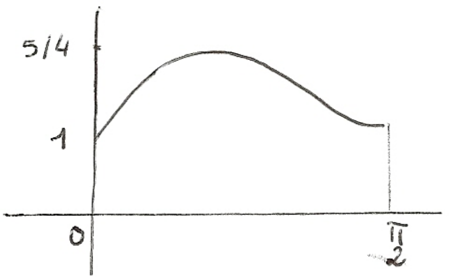
$$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos^2 x = 1 + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x, \quad x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

La fz. è positiva, $f(0) = f(\pi/2) = 1$.

$f'(x) = \cos x\,(1 - 2\operatorname{sen} x)$

$f''(x) = 4\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2$





$\alpha = \operatorname{arcsen} \frac{1+\sqrt{33}}{8}$

nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ si crea un pto angoloso in $x = 0$.

3. $$y = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x}{2\operatorname{sen} x \cos x}\, dx = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x + 2}{2\operatorname{tg} x}\, dx \underset{\operatorname{tg} x = t}{=} \int \frac{t^2 + 2}{2t(t^2+1)}\, dt \underset{\substack{t^2 = z \\ 2t\,dt = dz}}{=}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{z+2}{z(z+1)}\, dz = \frac{1}{4}\int \left\{\frac{2}{z} - \frac{1}{z+1}\right\} dz = \frac{1}{4} \lg \frac{z^2}{|z+1|} + c$$

$$= \frac{1}{4} \lg \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} + c = \lg \frac{|\operatorname{tg} x|}{\sqrt[4]{\operatorname{tg}^2 x + 1}} + c.$$

Poichè $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \lg \frac{|\operatorname{tg} x|}{\sqrt[4]{\operatorname{tg}^2 x + 1}} = +\infty$, l'integrale $\int_{\pi/3}^{\pi/2} f(x)\, dx$ non esiste.

Per ottenere a priori lo stesso risultato, basta osservare che per $x \to \frac{\pi}{2}$ è:

$$\frac{2 - \operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen} x \cos x} \sim \frac{1}{\cos x} \sim \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \qquad \left(\text{infatti: } \cos x = \left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) + o\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)\right).$$

La fz. è infinito di ordine 1, dunque l'integrale non esiste.

4. Poniamo $z = x + iy$:

$$1 - x^2 + y^2 - 2ixy + \sqrt{x^2+y^2} = 2x - 2iy - 4x$$

$$\begin{cases} 1 - x^2 + y^2 + \sqrt{x^2+y^2} = -2x \\ xy = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y^2 + \sqrt{y^2+1} = -2 \end{cases}$$

non ha soluzioni

opp.

$$\begin{cases} y = 0 \\ 1 - x^2 + |x| = -2x \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y = 0, \quad x \geq 0 \\ x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \iff z = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

opp.

$$\begin{cases} y = 0, \quad x < 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \iff z = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$