Soluzioni

1.

C.E. $\mathbb{R}$

$f(-x) = \sqrt[3]{(-x+2)^2} - \sqrt[3]{(-x-2)^2} = \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2} = -f(x)$ (fz. dispari)

il grafico è simmetrico rispetto all'origine: possiamo limitarci a studiare la funzione per $x \geq 0$

SGN $f(x) \geq 0 \iff (x+2)^2 \geq (x-2)^2 \iff x \geq 0$; $f(0) = 0$.

LIM per calcolare il limite per $x \to +\infty$, eseguiamo il c. di v. $t = 1/x \to 0^+$ e poi applichiamo la formula di Taylor o il teorema dell'Hôpital:

$\sqrt[3]{(1+2t)^2} - \sqrt[3]{(1-2t)^2} \,/\, t^{2/3} = (1+\frac{4}{3}t + o(t)) - (1 - \frac{4}{3}t + o(t)) \,/\, t^{2/3} \sim \frac{8}{3}t / t^{2/3} \to 0^+$

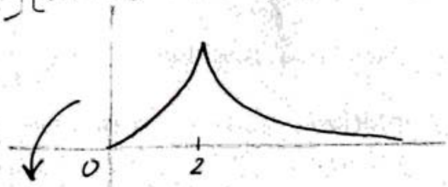
DRV $f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\right)$ per $x \neq 2$ (punto di cuspide)

$$= \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}\,\sqrt[3]{x-2}} \geq 0 \iff 0 \leq x \leq 2.$$

DRV² $f''(x) = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^4}}\right) \geq 0 \iff (x+2)^4 \geq (x-2)^4 \iff$

$$\iff (x+2)^4 - (x-2)^4 \geq 0 \iff [(x+2)^2 - (x-2)^2][(x+2)^2 + (x-2)^2]$$

$$\iff (x+2)^2 - (x-2)^2 \geq 0 \iff x \geq 0$$



2.

$\operatorname{sen} x = x - x^3/6 + o(x^4)$

$\operatorname{sen}^2 x = x^2 - x^4/3 + o(x^4)$

$\sqrt[3]{1+\operatorname{sen}^2 x} = \sqrt[3]{1 + x^2 - x^4/3 + o(x^4)} = 1 + \frac{1}{3}(x^2 - x^4/3) - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x^4 + o(x^4)$

N. $= 3 + x^2 - \frac{2}{3}x^4 - 5 + 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) = -\frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$

D. $= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{x^2}{2} - 1 + o(x^4) = -\frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$

limite $= 14/3$.

3. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$ $\quad f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{16(1+c)^{5/2}}$

$16{,}12 = 16\left(1 + \frac{0{,}12}{16}\right) = 16\,(1 + 0{,}0075)$

$\sqrt{16{,}12} = 4\sqrt{1+0{,}0075} \sim 4\left(1 + \frac{0{,}0075}{2} - \frac{(0.0075)^2}{8}\right) = 4{,}014971875$

Poiché l'errore è **positivo**, l'approssimazione è **per difetto**.

$E = \frac{4\,(0{,}0075)^3}{16\,(1+c)^{5/2}} < \frac{75}{4}\,10^{-12} < 20 \cdot 10^{-12}$.

4. Integrando per parti: $x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx - \int \frac{dx}{1+x^2} =$

$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\lg(1+x^2) - \operatorname{arctg} x + c.$

5. $(-1)^n$ è una successione limitata che non ha limite.

n è una successione che ha limite (infinito) e non è limitata.

Si ricordi che una successione dotata di limite finito è limitata.