Serie numeriche ed equazioni differenziali : esercizi proposti

1. Studiare la convergenza delle seguenti serie :

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n \log n}{n^2+1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+\log n}{\sqrt{1+n^3}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)^{3/2}-1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n^2+e^{-n}}{n^2+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{2^n+2^{-n}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1-\cos(1/n))}{\sqrt{n+1}}$

8. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$

9. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n!)}$

10. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{1+n^2}$

2. Studiare la convergenza delle seguenti serie al variare del parametro reale x :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n x^{2n}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+n^3}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n x)}{\sqrt{n+n^2x^2}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x+n^2+1}{n^3+n+2}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2+1} x^n$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx}$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(\log(x^2-1))^n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n+\sqrt{n}}{n^x}$

3. Risolvere le equazioni o i sistemi differenziali lineari seguenti (e, quando richiesto, imporre le condizioni iniziali indicate) :

1. $y'' + 4y = \operatorname{sen} x$

2. $y'' + y = \cos x$

3. $y'' + 4y' + wy = x e^x$

4. $2y''' - y'' - y = \operatorname{sen} x$

5. $y'' + y' = x \operatorname{sen} x \quad , \; y(0) = 0 \quad , \; y'(0) = 1$

6. $y'' + 4y = e^{2x}(1 + x) \quad , \; y(0) = 0 \quad , \; y'(0) = 1$

7. $y' = y - 2z + \operatorname{sen} x \quad , \; z' = 2y + z \quad , \; y(0) = z(0) = 0$

8. $y' + y / \sqrt{x} = \sqrt{x}$

4. Risolvere le seguenti equazioni a variabili separate (e, quando richiesto, imporre la condizione iniziale indicata) ; precisare l'intervallo in cui sono definite le soluzioni e tracciare il grafico di alcune di esse :

1. $y' = e^y$

2. $y' = (1 + 2x)(1 + y^2) \quad , \; y(0) = 1$

3. $y' = \sqrt{(y/x)} \quad , \; x > 0$

4. $y' = x \cos y / (1 + \operatorname{sen} y) \quad , \; |y| < \pi/2$

5. Una palla è lasciata cadere verticalmente al suolo da un'altezza di 1 metro; ad ogni rimbalzo perde il 10 % della sua energia e quindi risale ad un'altezza pari ai 9/10 di quella iniziale . Con l'ipotesi fatta sull'energia, la palla rimbalza infinite volte : trovare lo spazio complessivo percorso.
Trovare il tempo necessario alla palla per fermarsi, ricordando che per cadere da una altezza di h metri la palla impiega $\sqrt{2h/g}$ secondi (dove g è l'accelerazione di gravità pari a circa 9,8 m/s^2) e che lo stesso tempo era stato impiegato per la risalita precedente.
Osservare che , pur compiendo infiniti rimbalzi, sia il tempo richiesto perché si fermi sia lo spazio percorso sono finiti : a questo punto qualcuno potrebbe ricordarsi dell'antico filosofo Zenone e del suo paradosso su Achille e la tartaruga ….

6. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere :

1. ogni serie assolutamente convergente è convergente
2. ogni serie convergente è assolutamente convergente
3. una serie a segno costante non può essere indeterminata
4. una serie convergente ha il termine generale infinitesimo
5. ogni serie con termine generale infinitesimo è convergente
6. ogni serie a segno alterno è convergente