Soluzioni

1. Rappresentazione parametrica della superficie (coordinate sferiche):

$$\begin{cases} x = R \,\mathrm{sen}\,\theta \cos\varphi \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \arccos\frac{h}{R} \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array}$$

$$\|\phi_\theta \wedge \phi_\varphi\| = R^2 \,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\delta(x,y,z) = R\,|\cos\theta|$$

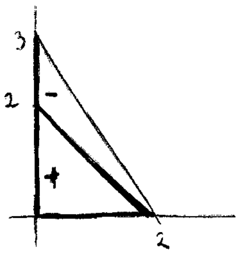
$$\int_S \delta \, dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arccos\frac{h}{R}}^{\pi} R^3 \,\mathrm{sen}\,\theta\,|\cos\theta|\, d\theta = 2\pi R^3 \left(\int_{\arccos\frac{h}{R}}^{\pi/2} \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\, d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\, d\theta \right)$$

$$= 2\pi R^3 \left\{ \left[-\frac12 \cos^2\theta \right]_{\arccos\frac{h}{R}}^{\pi/2} - \left[-\frac12 \cos^2\theta\right]_{\pi/2}^{\pi} \right\} = \pi R\,(h^2 + R^2)$$

$$\int_S z\,\delta\, dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arccos\frac{h}{R}}^{\pi} R^4 \cos\theta|\cos\theta|\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta = 2\pi R^4 \left(\int_{\arccos\frac{h}{R}}^{\pi/2} \mathrm{sen}\,\theta\cos^2\theta\, d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{sen}\,\theta\cos^2\theta\, d\theta \right)$$

$$= 2\pi R^4 \left\{ \left[-\frac13 \cos^3\theta \right]_{\arccos\frac{h}{R}}^{\pi/2} - \left[-\frac13 \cos^3\theta\right]_{\pi/2}^{\pi} \right\} = \frac23 \pi R\,(h^3 - R^3)$$

$$z_G = \frac23 \; \frac{h^3 - R^3}{h^2 + R^2}$$

2. 

$\nabla f = (2y - 2xy - y^2,\; 2x - x^2 - 2xy)$

I punti con $x=0$ o $y=0$ non sono interni.
I punti stazionari interni sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 2 - 2x - y = 0 \\ 2 - x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow P = (2/3,\, 2/3), \quad f(P) = 8/27.$$

Sui cateti la funzione è nulla: questi punti non possono essere né di massimo né di minimo.
Sull'ipotenusa $y = \frac{6-3x}{2}$, $x \in [0,2]$ e riconduciamo a studiare la funzione $\varphi(x) = -\frac34 x(x-2)^2$. L'unico punto stazionario interno è $x = 2/3$ a cui corrisponde il punto $Q = (2/3,\, 2)$, $f(Q) = -8/9$.
Dunque, $\max f = 8/27$, $\min f = -8/9$

L'ipotenusa ha equazione $3x + 2y = 6$; la retta per l'origine ad essa parallela ha dunque equazione $3x + 2y = 0$. Un punto su di essa è - ad esempio - $(2,-3)$.
Il versore da considerare è dunque $v = (2/\sqrt{13},\, -3/\sqrt{13})$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac12 + t\frac{2}{\sqrt{13}},\, \frac12 - t\frac{3}{\sqrt{13}}\right) - f\left(\frac12, \frac12\right)}{t} = \dots = \lim_{t\to 0} \frac{t\left(\frac{1}{\sqrt{13}} - \frac{3}{2\sqrt{13}} + \frac{1}{4\sqrt{13}}\right) + o(t)}{t} = -\frac{1}{4\sqrt{13}}$$

Allo stesso risultato si arriva attraverso il prodotto scalare $\nabla f(\frac12,\frac12)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$.

L'esistenza e l'unicità locale di $\varphi(x)$ è assicurata dal teorema del Dini, osservato che $\partial f(\frac12,\frac12)/\partial y \neq 0$.
Poiché in un intorno di $x_0 = \frac12$ è $x\varphi(x)(2 - x - \varphi(x)) = 0$ derivando due volte, si deducono i valori di $\varphi'(1/2)$, $\varphi''(\frac12)$ (sappiamo già che $\varphi(\frac12) = \frac12$). In conclusione:
$\varphi(x) = \frac12 - 2(x - \frac12) - 2(x-\frac12)^2 + o(x - \frac12)^2$, essendo $\varphi'(\frac12) = -2$, $\varphi''(\frac12) = -4$.

3.

Il dominio è individuato dalle disuguaglianze $0 \le z \le 1 - x/2$, $\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+y^2} \le z$.
Perché siano consistenti, deve essere

$$\begin{cases} 1 - x/2 \geq 0 \\ (x-1/2)^2 + y^2 \le (1-x/2)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \le 2 \\ x^2 + \frac{4}{3}y^2 \le 1 \end{cases} \iff x^2 + \frac{4}{3}y^2 \le 1$$

$$V = \iint_E dx\,dy \int_{\sqrt{(x-1/2)^2+y^2}}^{1-x/2} z\,dz = \frac{1}{2}\iint_E \left[\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - y^2\right] dx\,dy$$

Poniamo $x = r\cos\theta$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2} r \,\text{sen}\,\theta$ (con $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$).
Essendo $|J| = \frac{\sqrt{3}}{2} r$, si ottiene:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 r\,dr \int_0^{2\pi}\left[\left(1-\frac{r}{2}\cos\theta\right)^2 - \left(r\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}r^2\,\text{sen}^2\theta\right] d\theta =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 dr \int_0^{2\pi}\left(r - r^2\cos\theta + \frac{r^3}{4}\cos^2\theta - r^3\cos^2\theta - \frac{r}{4} + r^2\cos\theta - \frac{3}{4}r^3\,\text{sen}^2\theta \right) d\theta =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 \left(\frac{3}{2} r\pi - \frac{3}{4}r^3\left[\frac{\theta + \text{sen}\,\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{2\pi} - \frac{3}{4}r^3\left[\frac{\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \right) d\theta =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 \frac{3}{2}\pi\,(r - r^3)\,dr = \frac{3\sqrt{3}}{32}\pi.$$

4. L'unicità (e l'esistenza) seguono dal Teorema di Cauchy.
La soluzione è crescente e si mantiene minore della soluzione costante $y=a$. Per trovare la soluzione, si procede come di consueto:

$$\int \frac{dy}{(b-y)(a-y)} = \int k\,dx \iff \frac{1}{a-b}\lg\left|\frac{y-a}{y-b}\right| = kx + c$$

Per la c.i. deve essere $c = \frac{1}{a-b}\lg\frac{a}{b}$.

$$\frac{1}{a-b}\lg\frac{b}{a}\,\frac{a-y}{b-y} = kx$$

$$y = ab\,\frac{e^{k(a-b)x} - 1}{a e^{k(a-b)x} - b}.$$

Deve essere

$$ab\,\frac{e^{k(a-b)x} - 1}{a e^{k(a-b)x} - b} < a \iff x > \frac{1}{k(a-b)}\lg\frac{b}{a}.$$