Il potentissimo algoritmo di Duncan-Levison per risolvere l'Equazione di Keplero nelle tre forme: ellittica, iperbolica, parabolica

Giuseppe Matarazzo

Agosto 2003

Sommario

Questo breve lavoro mostra come sia possibile trovare nella letteratura scientifico-astronomica un valido supporto per chi si occupa di calcolo delle effemeridi, soprattutto nelle situazioni più *estremizzate*. L'efficacissimo algoritmo dei due ricercatori americani Duncan e Levison è esposto nelle sue linee generali, mentre è possibile conoscerne i dettagli attraverso i listati Fortran prelevabili, insieme ad un programma eseguibile, dal sito telematico indicato in bibliografia.

1 Introduzione

L'equazione di Keplero è lo strumento basilare per individuare la posizione di un corpo celeste nello spazio: basta conoscere due importanti parametri, l' *eccentricità* (e) e l' *anomalia media* (M) per calcolare l'*anomalia eccentrica* (E, per le orbite ellittiche; F per le traiettorie iperboliche e D per quelle paraboliche).

Nelle situazioni più comuni, con orbite ellittiche non eccessivamente eccentriche o con traiettorie iperboliche aventi (e) non prossime all'unità, la convergenza dell'equazione trascendente di Keplero si ottiene con successo indipendentemente dal valore iniziale scelto per l'anomalia eccentrica. Le cose cominciano a complicarsi nelle situazioni più estreme, come nei moti cosiddetti *quasi-parabolici*, quando anche un procedimento ineccepibilmente corretto, ossia con scarti dei valori iterati inferiori alla tolleranza fissata, può rivelarsi completamente *errato*, proprio in virtù del valore iniziale dell'iterazione.

Vedremo pure come il caso del moto *parabolico* (e=1), che funge da spartiacque tra le altre due coniche, presenti invece una comoda soluzione analitica, risolvibile con l'equazione di 3° grado di Cardano.

2 Gli Algoritmi

Lo schema di calcolo, mostrato nel listato del capitolo 6, è estremamente semplificato. Vengono introdotti nel programma i due dati (e,M), essendo il primo adimensionale e il secondo espresso in *radianti* e, in funzione di (e), un apposito parametro (ialpha) viene settato su uno dei tre valori (+1, 0, -1) a seconda se la traiettoria è iperbolica, parabolica o ellittica. Un'apposita subroutine viene quindi chiamata e questa provvede a restituirci l'anomalia eccentrica (X), che viene quindi visualizzata.

E' chiaro che il **cuore** del problema risiede nel modo in cui si sviluppano e *dialogano* tra di loro le routines di Duncan-Levison copiate nel file *wild.f*. In fase di compilazione è richiamato il breve file *wild.dat* contenente alcuni dati numerici e il valore della tolleranza di calcolo ($Tiny = 4 \cdot 10^{-15}$).

Il file eseguibile (*BESTKEPL.EXE*), anch'esso prelevabile insieme ai listati Fortran dal sito indicato nei richiami bibliografici, mostra il quadro generale di dati e risultato, nonchè un quadro riassuntivo di come si calcolano le anomalie medie nei tre tipici casi dell'equazione di Keplero.

3 Moto Parabolico: e=1

L'equazione per il calcolo dell'anomalia eccentrica (D), elaborata da **Barker**, è un'equazione di 3° grado risolvibile anche per via analitica con il metodo algebrico di Cardano.

Eccola:

$$D^3 + 3 \cdot D - 3 \cdot M = 0$$

Se, per esempio, diamo come input del programma $M = \frac{4}{3} = 1.33\bar{3}$ radianti (oltre a e=1 della parabola), non possiamo che ottenere $D = 1$, come si ricava immediatamente per sostituzione dei valori nell'equazione.
Con $M = -275.233\ 583\ 2$, che corrisponde all'anomalia media di un corpo del sistema solare che sta avvicinandosi al perielio $q = 0.5$ UA ma che si trova ancora lontano di 8000 giorni, si calcola un'anomalia eccentrica $D = -9.274\ 954\ 334\ 014$ rad.

4 Moto Iperbolico: e>1

L'equazione di Keplero è la seguente:

$$e \cdot \sinh(F) - F = M$$

Ricordiamo che il *seno iperbolico* dell'argomento F vale: $\sinh(F) = (\exp(F) - \exp(-F))/2$
Valutiamo una situazione *estremizzata* come questa: e=2, M= -143.406 421 155 577 5
BestKepl.exe dà come risultato: F=-5.000 000 000 000.
Mentre per e=1.0003 ed M=3.14 radianti, si ottiene F= 2.415 674 852 352 radianti, dopo 4 iterazioni avvenute all'interno della subroutine *orbel_fget* e necessarie per raggiungere la convergenza desiderata.

5 Moto Ellittico: e<1

Questo è il caso dell'equazione **classica** di Keplero:

$$E - e \cdot \sin(E) = M$$

Esaminiamo che succede quando e=0.9999, M=6.28 radianti. Otteniamo questo valore dell'anomalia eccentrica: E= 6.016 245 795 994 radianti. Per una condizione di moto quasi circolare (e=0.001, M= 1.5 rad) dal programma si ricava: E= 1.500 997 565 055 rad.

6 Listato Fortran

```
*   --------------------
*   PROGRAM BESTKEPL.FOR  L'Equazione di Keplero nelle 3 forme
*   --------------------  (Ellit/Iperb/Parab) risolta con le
*                         affinatissime subroutines di Duncan e Levison
*                         (Queen's University - Colorado - USA)
*
*                         Files INCLUSI: Wild.f, Wild.dat
*-----------------------------------------------------------------------

      implicit double precision (a-h,o-z)
      real*8 e, capM, X

      print 1000

1000  format (2x,'                BESTKEPL                         '/
     .        2x,'  Un Potente Algoritmo per l''Equazione di Keplero '/
     .        2x,'   Traiett.:  e<1 ELLITT.; e>1 IPERB.; e=1 PARAB.  ')
      write(*,*) '   ---------------------------------------------'
      write(*,*) '      1) Moto Ellittico :  E - e * SIN(E) =  M    '
      write(*,*) '         M= [k_gauss/a^1.5]*(t-tp)                '
      write(*,*) '      2) Moto Iperbolico:  e * SINH(F) -F =  M    '
```

```
      write(*,*) '          M= [k_gauss/a^1.5]*(t-tp)                '
      write(*,*) '       3) Moto Parabolico:  D^3 + 3*D = 3*M        '
      write(*,*) '          M= [k_gauss/(2*q^1.5)]*(t-tp)  (Barker) '
      write(*,*) '                         con                       '
      write(*,*) '             k_gauss = 0.017 202 098 95            '
      write(*,*) '          (Angoli in RADIANTI - Tempi in GIORNI)   '
      write(*,*) '    -----------------------------------------------'

      print 777
 777  format (5x,'Immettere l''Eccentricita''          (e): ',$)
      read (*,*) e

      print 778
 778  format (5x,'Immettere l''Anomalia Media in rad. (M): ',$)
      read (*,*) capM

      if (e.lt.1.0) ialpha= -1
      if (e.gt.1.0) ialpha= 1
      if (e.eq.1.0) ialpha= 0

      CALL orbel_el2xv (ialpha,e,capM,X)

      write(*,*)
      write(*,*) '    ----------       D A T I       ------------'
      write (*,101) e, capM
  101 format('     (e, M) =',2f18.12)

      write(*,*)
      write(*,*) '    ----------   R I S U L T A T I   ------------'
      write (*,106) X
  106 format('            Anomalia Eccentrica=',f17.12,' rad')

      end     ! Fine del Programma

      INCLUDE 'wild.f'    ! Subroutines inserite in questo file
*
```

7 Conclusione

Il rigore **professionale** con cui gli Autori hanno predisposto le subroutines di calcolo fa sì che questo lavoro possa essere considerato come una **guida sicura** per lo studioso di astronomia di posizione; in special modo se vuole evitare qualche *trappola* insidiosa tipica dei procedimenti iterativi.

Riferimenti bibliografici

[1] G.Matarazzo
Sito Internet: *http://astrodinamica.altervista.org*