

ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO

Esercizio 1. (aritmetica+stabilità + condizionamento)

Si consideri il sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A = \begin{bmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 + \epsilon \\ 1 \end{bmatrix},$$

con soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{ones}(2, 1)$.

1. Si studi il condizionamento in norma infinito di A per $|\epsilon|$ piccolo.
2. Si calcoli la soluzione del sistema lineare utilizzando il metodo di eliminazione gaussiana senza pivoting fissando un valore di ϵ tale che $0 < \epsilon < \mathbf{u}$ con \mathbf{u} precisione di macchina.
3. Per lo stesso valore di ϵ si calcoli la soluzione del sistema lineare utilizzando il metodo di eliminazione gaussiana con pivoting parziale.

Esercizio 2.(stabilità +condizionamento)

La matrice di Hilbert di ordine n è definita da $H_n = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $a_{i,j} = 1/(i+j-1)$, $1 \leq i, j \leq n$.

1. Scrivere un programma che introdotto $k \in \mathbb{N}$ restituisce in output la lista dei valori del condizionamento in norma 2 delle matrici di Hilbert di ordine n con $1 \leq n \leq k$.
2. Plottando il valori della lista appena calcolata formulare un modello per descrivere la crescita del condizionamento al crescere di n .
3. Per $n = 8$ determinare $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^8$ tale che $H_8 \mathbf{ones}(8, 1) = \mathbf{b}$. Risolvere quindi il sistema lineare $H_8 \mathbf{x} = \mathbf{b}$ usando il comando "Backslash" in Matlab e valutare la norma del residuo $\| H_8 \mathbf{x} - \mathbf{b} \|_2$. È la soluzione determinata numericamente accurata?
4. Chiarire teoricamente i fenomeni sperimentali osservati.
5. La matrice di Hilbert ha inversa ad elementi interi. Determinare l'inversa esatta di H_5 .