DFT = Trasformata di Fourier Discreta

La DFT agisce sulle successioni periodiche. Con le dovute cautele, legate anche al problema della finestratura, si può utilizzarla anche per il filtraggio di segnali non periodici.

Definizione:

Assegnati $2N$ numeri reali $x_0, x_1, ..., x_{2N-1}$ si definisce la loro Trasformata di Fourier Discreta ponendo:

$$\forall m \quad \xi_m = \sum_{p=0}^{2N-1} x_p \ e^{i \frac{2\pi}{2N} mp}$$

La successione ξ_m così ottenuta ha periodo $2N$, cioè:

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad \xi_m = \xi_{m+2N}$$

e i valori distinti che rappresentano l'intera successione sono

$$\xi_{-N}, \xi_{-N+1}, ..., \xi_{-1}, \xi_0, \xi_{+1}, ..., \xi_{N-1}$$

Si definisce la Antitrasformata di Fourier Discreta ponendo:

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{2N} \sum_{m=-N}^{N-1} \xi_m \ e^{-i \frac{2\pi}{2N} nm}$$

la successione $\tilde{x}_n$ è periodica di periodo $2N$, e si ha

$$\tilde{x}_0 = x_0, \tilde{x}_1 = x_1, ..., \tilde{x}_{2N-1} = x_{2N-1}$$

Dimostrazione:

La dimostrazione di questo fatto è del tutto elementare, poichè basta sostituire e verificare $\forall n = 0, 1, ..., 2N-1$

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_n &= \frac{1}{2N} \sum_{m=-N}^{N-1} \xi_m \ e^{-i \frac{2\pi}{2N} nm} = \frac{1}{2N} \sum_{m=-N}^{N-1} \sum_{p=0}^{2N-1} x_p \ e^{i \frac{2\pi}{2N} mp} \ e^{-i \frac{2\pi}{2N} nm} = \\
&= \sum_{p=0}^{2N-1} x_p \left\{ \frac{1}{2N} \sum_{m=-N}^{N-1} e^{i \frac{2\pi}{2N} m(p-n)} \right\} = \\
&= x_n
\end{aligned}$$

Infatti l'espressione in parentesi graffa vale 1 se $p = n$, altrimenti si usa la formula della somma di $2N$ termini in progressione geometrica, trovando 0.